

Теорема Безу

В этом листке мы будем считать, что степень нулевого многочлена равна -1 .

1. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, и $Q(x) \neq 0$. Докажите по индукции по $\deg P(x)$, что существуют такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, что $\deg R(x) < \deg Q(x)$ и $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

В этих обозначениях $R(x)$ называется *остатком* $P(x)$ при делении на $Q(x)$.

2. Поделите с остатком (а) $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; (б) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; (в) $x^n - 2$ на $x - 1$
3. **Теорема Безу.** Дано число a . Докажите, что многочлен $P(x)$ даёт остаток $P(a)$ при делении на $x - a$.
4. Дано число a . Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда a является его корнем.
5. Про многочлен $P(x)$ известно, что $P(-1) = 2$, а $P(1) = 3$. Какой остаток может давать $P(x)$ при делении на $x^2 - 1$?
6. (а) Пусть a_1, \dots, a_k — различные числа. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на произведение $(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_k)$ тогда и только тогда, когда все a_i являются корнями $P(x)$.
(б) Докажите, что у многочлена степени $n \geq 0$ не более n различных корней.
7. Докажите, что $P(a) = Q(a)$ для любого действительного a , то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают (то есть у них совпадают все соответствующие коэффициенты).

Кратностью корня a многочлена $P(x)$ называется наибольшее целое k такое, что $P(x)$ делится на $(x - a)^k$. Будем обозначать её через $\text{mult}_P(a)$.

8. Докажите, что $\text{mult}_{P \cdot Q}(a) = \text{mult}_P(a) + \text{mult}_Q(a)$.
9. Докажите, что у многочлена степени $n \geq 0$ не более n корней с учётом кратности.