

Числа Фибоначчи

В последовательности Фибоначчи $F_1 = F_2 = 1$, а $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при всех $n > 1$.

1. Сколькими способами можно разбить на доминошки
(а) прямоугольник 2×10 ?
(б) прямоугольник $2 \times n$?
2. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых не меньше, чем 2? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)
3. (а) У Аскара Флоридовича есть n палочек, каждая не больше одного метра в длину. Оказалось, что ни из каких трёх из них нельзя составить треугольник. Какой максимальной длины может быть самая короткая палочка?
(б) Владислав Викторович взял три одинаковые палочки и разломил каждую из них на несколько кусков. Докажите, что среди кусков можно найти три, из которых можно сложить треугольник.
4. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка отгадать число?
5. На почте есть $k + 1$ гирька: 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, ..., 2^k г. Перед отправлением посылки весом в x граммов работник почты проверяет её вес на чашечных весах, причём гирьки он может класть на обе чаши. Каждое такое взвешивание занимает у работника почты ровно одну минуту. За какое время работник гарантированно справится с проверкой веса, если он проверяет его всеми возможными способами?
6. Найдите число решений в натуральных числах уравнения $(x^2 - xy - y^2)^2 = 1$ таких, что $x, y < 2021$.