

## Ортоцентр

Ортоцентр треугольника — точка пересечения его высот.

1. Точки  $H$  и  $O$  — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые  $AH$  и  $AO$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ .
2. (а) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон, лежат на описанной окружности.  
(б) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно середин сторон, лежат на описанной окружности и диаметрально противоположны вершинам.
3. В треугольнике  $ABC$  точки  $H$ ,  $O$  и  $K$  — ортоцентр, центр описанной окружности и середина стороны  $BC$  соответственно. Докажите, что  $AH = 2OK$ .
4. **Прямая Эйлера.** В треугольнике  $ABC$  точки  $H$ ,  $O$  и  $M$  — ортоцентр, центр описанной окружности и точка пересечения медиан соответственно. Докажите, что  $M$  лежит на отрезке  $OH$  и  $HM = 2OM$ .
5. (а) В остроугольном треугольнике  $ABC$  отмечен ортоцентр  $H$ . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  равны.  
(б) Три равные окружности проходят через точку  $P$  и пересекаются попарно повторно в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $XYZ$  равна трём исходным окружностям.
6. (а) Прямая  $\ell$  проходит через ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые, симметричные  $\ell$  относительно сторон, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности.  
(б) Прямые, симметричные некоторой прямой  $\ell$  относительно сторон треугольника  $ABC$ , пересеклись в одной точке. Докажите, что  $\ell$  проходит через ортоцентр.  
(с) Прямая  $\ell$  не проходит через вершины треугольника  $ABC$ . Прямые, симметричные  $\ell$  относительно  $AB$  и  $BC$  пересеклись на описанной окружности. Докажите, что  $\ell$  проходит через ортоцентр.