Игры.

Что-то про цену игры.

1. У Паши есть 1011 карточек с числами $2, 4, \ldots 2020$, а у Вовы есть 1010 карточек с числами $1, 3, 5, \ldots 2021$. Игроки по очереди делают ходы, начинает Паша. Игрок, который ходит, выкладывает карточку с каким-то числом, после чего его соперник выкладывает какую-то свою карточку. Тот, у кого число на карточке больше, получает одно очко, а карточки, которые были выложены, отправляются в сброс и больше в игре не участвуют. Игра заканчивается после 1010 ходов. Какое наибольшее количество очков может гарантировать Паша?

2. Вася записал числа $1, 2, \ldots 100$ на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k. При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

3. На доске написаны числа от 1 до 1024. Аскар и Лиза по очереди стирают числа, начинает Аскар. За один ход любой игрок стирает половину написанных чисел. Игра заканчивается, когда осталось два числа. Цель Лизы, чтобы разность между этими числами была как можно меньше. Какую наименьшую разность она может обеспечить?

Что-то про неистовые разрезания

4. В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата 2019×2019 клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Карлсон, Малыш и Фрекен Бок играют в игру. У них есть шоколадка 2022×2022. Начинает Карлсон. За ход можно разделить какой-нибудь из имеющихся прямоугольных кусков на несколько попарно различных прямоугольных частей по сторонам клеток. Когда никто не может сделать ход, игра заканчивается. Карлсон получает все имеющиеся прямоугольники 1×2, Малыш — квадраты 1×1, Фрекен Бок — квадраты 2×2. Кто из игроков может взять больше остальных независимо от того, как они будут играть?

Без выдумок стратегий.

6. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N, для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

7. Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки:
(a) 100×100 и 100×500;
(b) 2×1000 и 4×2000.
За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из **трёх** кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не может сходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?

8. На плоскости даны $2n$ точек. Два игрока по очереди выбирают по одной точке до тех пор, пока они не закончатся. Проигрывает тот, у кого сумма попарных расстояний между выбранными им точками меньше, чем у соперника. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнёр? (Все расстояния между данными точками и все суммы попарных расстояний для разных наборов точек попарно различны.)