

Теорема Фалеса

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1 , на другой — A_2, B_2, C_2 . Тогда если $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, то $A_1B_1/B_1C_1 = A_2B_2/B_2C_2$.

1. **Теорема Менелая.** Прямая ℓ пересекает стороны BC, CA, AB (или их продолжения) треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Подсказка: спроецируйте все 6 точек на прямую, перпендикулярную ℓ .

2. Изначально жук сидит

(а) на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD .

(б) на стороне AB треугольника ABC . Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC .

Докажите, что жук вернулся в исходную точку.

3. *Свойство биссектрисы.* Пусть AD — (а) внутренняя; (б) внешняя биссектриса неравнобедренного треугольника ABC . Докажите, что $BD/DC = AB/AC$.
4. На плоскости нарисованы две прямые. На этих прямых отмечено по три точки: на первой — A, B, C , на второй — A', B', C' . Известно, что $AB' \parallel A'B$ и $AC' \parallel A'C$. Докажите, что $BC' \parallel B'C$.
5. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\frac{AB}{AX} + \frac{AD}{AY} = \frac{AC}{AZ}$.
6. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X . На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1, NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.
7. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C — прямые. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BX и DY на диагональ AC . Докажите, что $AX = CY$.
8. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2 , сторону AC — в точках B_1 и B_2 , сторону BC — в точках A_1 и A_2 . Докажите, что если перпендикуляры к сторонам, восстановленные в точках A_1, B_1, C_1 , пересекаются в одной точке, то и соответствующие перпендикуляры, восстановленные в точках A_2, B_2, C_2 , тоже пересекаются в одной точке.
9. Через точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами провели прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что они пересекаются в одной точке.