Неравенства о средних

1. **(a)** Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

для чисел n, являющихся степенями двойки и любых наборов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительных чисел.

(b) Докажите это неравенство для любых n спуском от n к $n-1$.

В следующих задачах можно пользоваться утверждением задачи 1 без доказательства.

2. Для положительных a, b, c докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

3. Докажите, что для положительных x выполнено $x^{40} + \frac{1}{x^{16}} + \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} \geqslant 16$.

4. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что

$$\frac{S}{S - a_1} + \frac{S}{S - a_2} + \ldots + \frac{S}{S - a_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$$

5. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

6. Для положительных чисел a, b, c верно $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2}$$

7. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 27$. Докажите, что

$$x + y + z \geqslant \sqrt{3xyz}$$