

Угол между хордой и касательной

Теорема. На окружности ω отмечены точки A и B , через точку A проведена касательная ℓ к ω . Тогда угол между прямыми ℓ и AB равен половине меры дуги AB .

1. Касательная к описанной окружности неравноболенного треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
2. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
3. Прямая PA касается описанной окружности треугольника ABC . Точки C_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB , AC . Докажите, что $BC \perp B_1C_1$.
4. Окружность касается сторон AB , BC , CD и DA четырехугольника $ABCD$ в точках X , Y , Z и T соответственно. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $XZ \perp YT$.
5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Точки B' и C' симметричны B_1 и C_1 относительно биссектрис углов B и C треугольника ABC соответственно. Докажите, что $B'C' \parallel BC$.
6. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На меньших дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
7. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B , а окружности Ω в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .