

## Целые и дробные части

**Определение** *Целая часть* числа  $x$  — наибольшее целое число не превосходящее  $x$ . Обозначается как  $[x]$ . *Дробная часть* числа  $x$  —  $\{x\}$  определяется как разность самого числа и его целой части.  $x - [x] = \{x\}$

1. У Пети есть калькулятор, на котором есть кнопка  $F$ . При нажатии на кнопку  $F$ , к числу прибавляется его дробная часть (например, из числа 2,36 получается число 2,72). Начав с положительного числа, меньшего 1, Петя за десять нажатий кнопки  $F$  получил число 10. С какого положительного числа он мог начать?
2. Найдите все натуральные  $n$ , для которых число  $[\frac{n^2}{5}]$  — простое.
3. Числа  $x, y, z, t$  таковы, что  $\{x + y + z\} = \{x + y + t\} = \{x + z + t\} = \{y + z + t\} = \frac{1}{4}$ . Найдите  $\{x + y + z + t\}$ .
4. Существуют ли нецелые числа  $x$  и  $y$ , для которых  $\{x\} \cdot \{y\} = \{x + y\}$ ?
5. Для чисел  $x > 1, y > 1$  известно, что  $\{x\} = \{y\}$  и  $\{\frac{1}{x}\} = \{\frac{1}{y}\}$ . Верно ли, что  $x = y$ ?
6. Докажите, что существует бесконечно много нецелых положительных чисел  $x$  таких, что число  $x(x - 3\{x\})$  - целое.
7. Решите уравнение  $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$
8. Существует ли рациональное число  $x > 0$ , для которого  $\{x^2\} + \{x\} = 1$ ?
9. Решите уравнение  $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$ .