

Эйлеровы графы и лемма о хоровахдах.

Определение. Цикл, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз называется *эйлеровым*.

Критерий эйлеровости. В графе существуют эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень каждой вершины чётная.

- (а) (**Лемма о хоровахдах**) Степень каждой вершины графа равна 2. Докажите, что граф представляет из себя объединение непересекающихся циклов.

(б) В связном графе все рёбра покрашены в цвета. Оказалось, что рёбра каждого цвета образуют цикл. Докажите, что в графе есть цикл, проходящий по всем рёбрам ровно один раз. *Такие циклы называются эйлеровыми.*

(с) В связном графе степень каждой вершины чётная. Докажите, что в нём существует эйлеров цикл.
- (а) В ориентированном графе из любой вершины можно добраться до любой другой (такие графы называются *сильно связными*). Кроме того, исходящая степень любой вершины равна её входящей степени. Докажите, что существует цикл, проходящий по всем рёбрам ровно один раз.

(б) Докажите, что если рёбра связного графа ориентировали так, что входящая степень каждой вершины равна её исходящей степени, то получившийся ориентированный граф сильно связный.
- (а) Степени всех вершин графа чётные. Докажите, что его рёбра можно ориентировать так, чтобы входящие и исходящие степени вершин были равны.

(б) Докажите, что рёбра произвольного графа можно ориентировать так, чтобы для каждой вершины количество входящих и исходящих рёбер отличалось не более, чем на 1.
- В волейбольном турнире принимают участие $2n$ команд. Команды сыграли два тура, в каждом из которых каждая команда проводила ровно один матч. Докажите, что можно выделить n команд, ещё не игравших друг с другом.
- (а) В волейбольной Лиге Чемпионов участвуют $2n$ команд из n стран, по 2 из каждой. Команды сыграли два тура, в каждом из которых каждая команда проводила ровно один матч. Докажите, что можно разбить все команды на два дивизиона так, чтобы команды из одной страны были в разных дивизионах и каждая команда сыграла не более одной игры в своём дивизионе.

(б) Лигу чемпионов реформировали и теперь из каждой страны участвует по 4 команды. Докажите, что после двух туров можно разбить все команды на четыре дивизиона так, чтобы никакая команда не была в одном дивизионе с той, с которой уже играла или с командой из своей страны.
- В волейбольном турнире принимают участие $2n$ команд. Они запланировали n мини-турниров. Во время каждого мини-турнира четыре команды играют между собой каждая с каждой. После n таких турниров каждая команда проведёт 6 матчей с разными соперниками. Докажите, что можно выбрать n матчей для телетрансляции так, чтобы показать и каждую команду, и каждый турнир.

Некоторые из вас может быть помнят прошлогодний лист про гамильтоновы пути и циклы. Так вот критерий эйлеровости удобнее тем, что он в обе стороны. Теоремы о существовании гамильтоновых циклов же наоборот были избыточными. Надеюсь, это относительное удобство вы ощутите, решив следующую, довольно трудную задачу.

- Можно ли выписать по кругу 64 цифры, каждая из которых 0 или 1 так, чтобы все куски из шести последовательных цифр были разными?