Отрезки касательных

1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC.

(a) Докажите, что M равноудалена от точек касания вписанной и вневписанной окружностей с отрезком BC.

(b) Докажите, что M равноудалена от точек касания вневписанных окружностей с продолжениями стороны BC.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что

(a) $AB + CD = AD + BC$; **(b)** $PC + AQ = QC + AP$; **(c)** $PD + DQ = PB + BQ$.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Оказалось, что существует окружность, касающаяся отрезков CP, CQ и продолжений отрезков AP, AQ за точки P, Q соответственно. Докажите, что

(a) $AB + BC = AD + DC$; **(b)** $AP + PC = AQ + QC$; **(c)** $BP + PD = BQ + QD$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC. Докажите, что ω_D и ω_B касаются тогда и только тогда, когда $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

5. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z. Докажите, что если один из четырехугольников $AXZY$ и $BCDZ$ — описанный, то второй — тоже описанный.

6. В трапеции $ABCD$ окружность ω_1 касается основания AD и продолжений BA и CD за точки A и D соответственно. Окружность ω_2 касается основания BC и продолжений AB и DC за точки B и C соответственно. Докажите, что касательная из B к ω_1, отличная от AB, параллельна касательной из D к ω_2, отличной от CD.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC. Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X, продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z, продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$