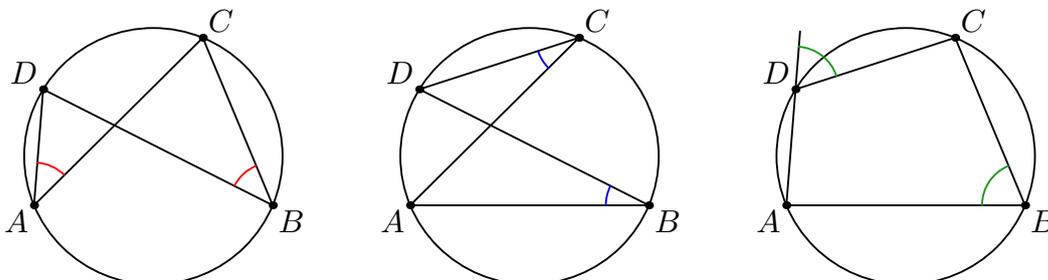


Вписанные четырёхугольники

Теорема. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

- (1) $\angle CAD = \angle CBD$; (2) $\angle ABD = \angle ACD$; (3) $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.



1. Внутри треугольника ABC отмечена точка P , а на сторонах BC , CA , AB — точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что если два из трех четырехугольников AB_1PC_1 , BC_1PA_1 , CA_1PB_1 вписанные, то третий тоже вписанный.
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
3. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A , B , K , O лежат на одной окружности.
4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что CO — биссектриса прямого угла.
5. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ отмечены точки H , I , O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B .
6. Дан остроугольный треугольник ABC . O — центр его описанной окружности. Прямая, симметричная AC относительно AB , и прямая, симметричная AC относительно BC , пересекаются в точке X . Докажите, что X лежит на прямой BO .
7. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка P , что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов ADP и PCB и серединный перпендикуляр к отрезку AB .