Степени вхождения

Определение *Степенью вхождения* простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k, что n делится на p^k. Обозначать для краткости будем $\nu_p(n)$ (это греческая буква “ню”)

Складываем

1. Докажите следующие свойства:
(a) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;
(b) $\nu_p(a+b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то достигается равенство.

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ является целым. Верно ли, что abc — точный куб?

4. Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

Факториалы

5. **формула Лежандра.** Докажите, что

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

6. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots a_k$ число

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$$

целое.

7. **(a)** Докажите, что наименьшее общее кратное чисел от n до $2n+1$ делится на $\dfrac{(2n+1)!}{n!n!}$.
(b) Докажите, что наименьшее общее кратное чисел от 1 до $2n+1$ больше 4^n.
(c) Предположим, что среди чисел от 1 до $2n+1$ ровно k простых. Докажите, что $(2n+1)^k > 4^n$.