Кружок в "Хамовниках". 2020-2021 учебный год. 8 класс.

Решения диагностической работы

1. Натуральное число назовём отличным, если его можно представить в виде суммы как 8, так и 25 последовательных натуральных чисел. Сколько существует отличных десятизначных чисел?

Ответ: 45 000 000.

Решение. Если сложить 8 последовательных чисел, начиная с n, то получится $8n + 28$. В таком виде представляюются все десятизначные числа, дающие остаток 4 при делении на 8.
Если сложить 25 последовательных натуральных чисел, начиная с n, то получится $25n + 300$. В таком виде представляются все десятизначные числа, кратные 25.
Таким образом, отличными являются числа, имеющие вид $200k+100$. Действительно, все такие числа подходят, а любое отличное число после вычитания 100 должно стать кратно 8 и 25, то есть 200.
Среди каждых 200 последовательных чисел ровно одно отличное. Десятизначных чисел $9 \cdot 10^9$, они разбиваются на группы из 200 последовательных, значит, отличных чисел в 200 раз меньше, то есть 45000000.

2. Все делители числа n пронумеровали в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < d_3 \ldots$. Оказалось, что $d_4 + d_6 + d_7 = n$. Чему может быть равно n? Перечислите все возможности.

Ответ: 24, 30.

Решение Заметим, что $d_7 < n$, иначе левая часть была бы больше n. А ещё $d_7 > n/3$, иначе левая часть была бы меньше n. Поэтому $d_7 = n/2$. В частности, у числа n всего 8 делителей, так как седьмой — это уже половина.

Далее, если $d_6 < n/3$, то $d_6 \leqslant n/4$ и левая часть снова маленькая. Поэтому $d_6 = n/3$. Тогда, чтобы сумма была равна n, d_4 обязано быть равно $n/6$. То есть d_5 больше $n/6$, но меньше $n/3$. Значит, надо разобрать два случая:

а) $d_5 = n/5$. Тогда число делится на 2, 3, 5, не делится на 4. Но у числа, кратного 30, уже как минимум 8 делителей, поэтому подходит только 30.

б) $d_5 = n/4$. То есть n уже делится на 2^2 и на 3. Никаких других простых делителей у числа n быть не может, так как тогда у него будет хотя бы 12 делителей (делители числа 12 и они же, умноженные на p). То есть $n = 3^k \cdot 2^m$; тогда $(k+1)(m+1)$ должно быть равно 8. Одна скобка должна быть равна 2, другая — 4, но $m \geqslant 2$, поэтому $m + 1 = 4$, $k + 1 = 2$. Поэтому подходит только $n = 24$.

3. Натуральное число назовём равномернорастущим, если его цифры идут в неубывающем порядке и соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Например, числа 1112223344 и 1234567778 — равномернорастущие. Сколько всего равномернорастущих десятизначных чисел, начинающихся с 1?

Ответ: 511.

Решение. Каждая цифра равномернорастущего числа либо больше предыдущей на 1, либо равна ей. Таким образом, на каждом месте у нас 2 варианта, какую цифру выбрать, и этот выбор мы делаем 9 раз — итого 512 вариантов. Но повысить все 9 раз мы не можем, поэтому вариант, где все 9 раз выбрано увеличение, нам не подходит. Получаем ответ $2^9 - 1 = 511$.

4. Для каждой последовательности из 10 цифр, каждая из которых — 0 или 1, посчитали количество кусков, состоящих из одинаковых цифр. (Например, для последовательности 00111001 таких куска 4: $00, 111, 00, 1$.) Все полученные числа сложили. Какое число получилось?

Ответ: 5632.

Решение. Так как количество кусков в числе — это количество пар соседних цифр 01 или 10 в этом числе, увеличенное на 1, то нам достаточно знать количество таких пар во всех последовательностях и количество самих последовательностей. Самих последовательностей всего 2^{10}. Давайте посчитаем, в каком количестве последовательностей пара 01 встречается на первых двух местах, затем на 2 и 3 местах и так далее. На первых двух местах пара 01 встречается 2^8 раз, так как нам подходят любые последовательности, где первые 2 цифры — это 01, а выбрать остальные цифры мы можем именно таким числом способов. На любой другой паре позиций подсчет абсолютно такой же. Пар позиций есть 9, поэтому разывов вида 01 получается $2^8 \cdot 9$. Точно такой же подсчет будет верен для пары 10. Поэтому суммарное число таких разрывов равно $2^8 \cdot 9 \cdot 2$, а в ответе получаем $2^8 \cdot 9 \cdot 2 + 2^{10} = 5632$.

5. 101 школьник играют турнир по шахматам на выбывание (после того, как школьник проиграл, он больше не участвует в турнире). Школьник считается успешным, если он выиграл хотя бы 5 матчей. Какое максимальное количество школьников могли оказаться успешными?

Ответ: 20.

Решение. Пусть было k успешных школьников. Заметим, что матчей было ровно 100. Все успешные школьники, кроме, может быть, одного, сыграли по 6 матчей. Матчей между успешными школьниками было не более $k-1$ (так как после $k-1$ такого матча остался один невыбывший успешный школьник). Значит, всего матчей было хотя бы $6(k-1) + 5 - (k-1) = 5k$. Следовательно, $5k \leqslant 100$ и $k \leqslant 20$.

Построим пример. Школьник номер 1 выиграл у школьников $2, 3, 4, 5, 6$ и проиграл школьнику 7. Школьник номер 7 дополнительно выиграл у школьников $8, 9, 10, 11$ и проиграл школьнику 12. Школьник номер 12 дополнительно выиграл у школьников $13, 14, 15, 16$ и проиграл школьнику 17, и так далее. Наконец, школьник номер 97 выиграл у школьников $98, 99, 100, 101$, а также 92.

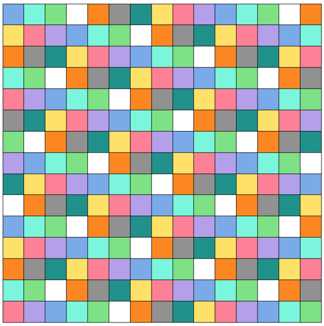
6. Дана плоскость, разделённая на квадратики со стороной 1. Известно, что если у двух клеток на этой плоскости есть общий сосед (по стороне или углу), то расстояние между их центрами меньше 3. В какое наименьшее число цветов можно покрасить клетки этой бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы расстояние между центрами клеток одного цвета было строго больше 3?

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что в каждом квадрате 3×3 все цвета разные. Пусть цветов ровно 9. Обозначим их цифрами от 1 до 9. Заметим, что среди клеток A, B, C должны встречаться цвета 1, 2, 3, так как в квадрате 3×3, нижнюю строчку которого они составляют, должны встречаться все цвета по одному разу. Клетка A не может быть цвета 1, значит, среди клеток B и C встречается цвет 1. Аналогично, среди клеток Y и Z встречается цвет 1. Однако среди клеток B, C, Y, Z не может повторяться никакой цвет. Противоречие. Следовательно, цветов должно быть хотя бы 10.

В примере каждый цвет создаёт «повёрнутую» решётку из квадратиков.

	1	2	3	X	
	4	5	6	Y	
	7	8	9	Z	
	A	B	C		



7. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя разделяет кучку из 202 камней на две, а потом ребята по очереди берут из двух кучек камни (начинает Вася). За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Сколькими способами Петя может разделить кучку так, чтобы Вася не смог его обыграть? Способы, отличающиеся перестановкой кучек, считаются одинаковыми.

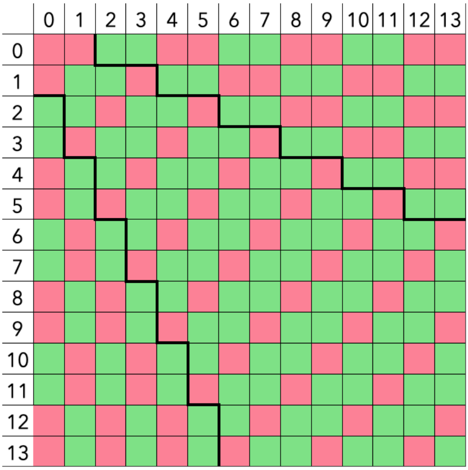
Ответ: 68.

Решение. Рассмотрим игру, в которой изначально в кучках a и b камней, а ребята по очереди берут из двух кучек камни по тем же правилам, что и в исходной задаче. Для каждой пары (a, b) определим, является ли соответствующая позиция выигрышной или проигрышной. Для удобства разделим четверть плоскости на клетки. Покрасим клетку в строке с номером $a+1$ и столбце с номером $b+1$ в зелёный, если вышеописанная позиция выигрышная, и в красный, если проигрышная (то есть верхняя левая клетка соответствует паре $(0, 0)$). Докажем по индукции по $a+b$, что выполнены следующие правила:

• если $a \geqslant 2(b+1)$, $a+2b$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4, то (a, b) выигрышная

• если $a \geqslant 2(b+1)$, $a+2b$ даёт остатки 0 или 1 при делении на 4, то (a, b) проигрышная

• если $b \geqslant 2(a+1)$, $2a+b$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4, то (a, b) выигрышная
• если $b \geqslant 2(a+1)$, $2a+b$ даёт остатки 0 или 1 при делении на 4, то (a, b) проигрышная
• если $a < 2(b+1)$, $b < 2(a+1)$ и $a+b$ даёт остатки 0 или 2 при делении на 3, то (a, b) выигрышная
• если $a < 2(b+1)$, $b < 2(a+1)$ и $a+b$ даёт остаток 1 при делении на 3, то (a, b) проигрышная



База при $a+b=0$, $a+b=1$ очевидна, докажем переход.

Разберём случай $a \geqslant 2(b+1)$.

Если $a \geqslant 2(b+1)$, $a+2b$ даёт остатки 0 или 1 при делении на 4, то из (a, b) есть ходы в $(a-2, b)$ и $(a, b-1)$. Заметим, что $a \neq 2b+2$ и $a \neq 2b+3$. Позиция $(a-2, b)$ выигрышная, так как $(a-2)+2b$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4. Позиция $(a, b-1)$ выигрышная, так как $a+2(b-1)$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4. Если $a \geqslant 2(b+1)$, $b \neq 0$, $a+2b$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4, то из (a, b) есть ход в $(a, b-1)$, которая проигрышная по предположению индукции. Если $b=0$, $a=a+2b$ даёт остатки 2 или 3 при делении на 4, то из (a, b) есть ход в $(a-2, b)$, которая проигрышная по предположению индукции (при $a \geqslant 4$) или по базе.

Аналогично разбирается случай $b \geqslant 2(a+1)$.

Пусть теперь $a < 2(b+1)$, $b < 2(a+1)$. Без ограничения общности, $a \geqslant b$.

Если $a = 2b+1$, то из (a, b) есть ходы в $(a-2, b)$ и $(a, b-1)$. Позиция $(a-2, b)$ выигрышная, так как $a-2 < 2(b+1)$, $b < 2(a-1)$ и $a-2+b$ даёт остаток 2 при делении на 3. Позиция $(a, b-1)$ выигрышная, так как $a \geqslant 2b$, и $a+2(b-1) = 4b-1$ даёт остаток 3 при делении на 4.

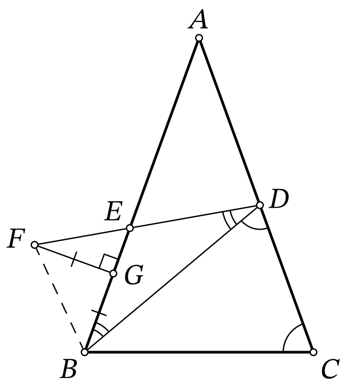
Если $a+b$ даёт остаток 1 при делении на 3 и $a \leqslant 2b$, то из (a, b) есть ходы в $(a-2, b)$ и $(a, b-1)$. Ясно, что $a \neq 2b$. Позиция $(a-2, b)$ выигрышная, так как $a-2 < 2(b+1)$,

$b < 2(a-1)$ и $a-2+b$ даёт остаток 2 при делении на 3. Позиция $(a, b-1)$ выигрышная, так как $a < 2b$, $b-1 < 2(a+1)$, и $a+b-1$ даёт остаток 0 при делении на 3. Если $a+b$ даёт остаток 2 при делении на 3, то из (a,b) есть ход в $(a, b-1)$. Ясно, что $a \neq 2b+1$ и $a \neq 2b$. Позиция $(a, b-1)$ проигрышная, так как $a < 2b$, $b-1 < 2(a+1)$ и $a+(b-1)$ даёт остаток 1 при делении на 3. Если $a+b$ даёт остаток 0 при делении на 3, то из (a,b) есть ход в $(a-2, b)$. Ясно, что $a \neq 2b+1$ и $a \neq 2b$. Позиция $(a-2, b)$ проигрышная, так как $a-2 < 2(b+1)$, $b < 2(a-1)$ и $(a-2)+b$ даёт остаток 1 при делении на 3.

В итоге мы полностью расклассифицировали выигрышные и проигрышные позиции. В задаче нам нужно посчитать количество проигрышных позиций (a,b), для которых $a+b = 202$ с точностью до перестановки a и b. Без ограничения общности, $a \geqslant b$. Тогда $0 \leqslant b \leqslant 101$. При $b \geqslant 67$ верно, что $a = 202 - b < 2(b+1)$ и $b < 2(a+1)$, а значит, все эти позиции проигрышные. Их 35. При $b \leqslant 66$ проигрышными являются позиции, для которых $a + 2b = 202 + b$ даёт остатки 0 или 1 при делении на 4. Иными словами, b даёт остаток 2 или 3. Таких позиций $64/2 + 1 = 33$. Итого, $33 + 35 = 68$.

8. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

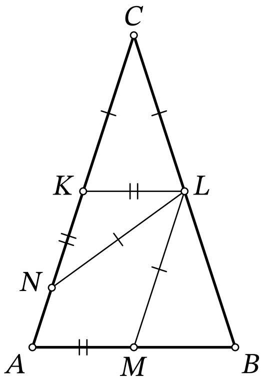
Ответ: 40°.



Решение. Положим $\angle BCA = \angle CBA = \alpha$. Из того, что треугольник BDC равнобедренный, следует, что $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$. Значит, $\angle DBE = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$. Из равнобедренности треугольника BED получаем, что $\angle EDB = 3\alpha - 180^\circ$. Прямоугольный треугольник FGB равнобедренный, откуда $\angle FBG = 45^\circ$. Находим $\angle FBD = 45^\circ + (3\alpha - 180^\circ) = 3\alpha - 135^\circ$. Треугольник FDB равнобедренный ($FD = BD$), поэтому $\angle BFD = 3\alpha - 135^\circ$. Вычисляя сумму углов треугольника BFD, получаем $180^\circ = 2(3\alpha - 135^\circ) + (3\alpha - 180^\circ) = 9\alpha - 450^\circ$. Тогда $\alpha = 70^\circ$, откуда $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha = 40^\circ$.

9. Точки M и L — середины сторон AB и BC соответственно равнобедренного треугольника ABC ($BC = AC$). Точка N на стороне AC такова, что $NA + AM = LN = LM$. Найдите угол NLM.

Ответ: $36°$.

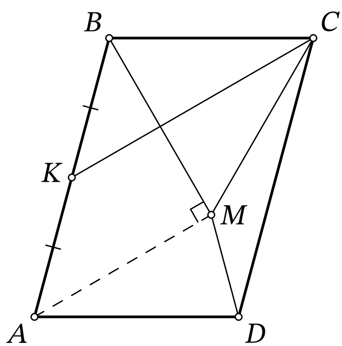


Решение. Так как ML — средняя линия в треугольнике ABC, то $LM = AC/2 = BC/2$. Следовательно, $LN = LC$ и $NA = LM - AM = AC/2 - AB/2$. Пусть K — середина AC. Тогда $NK = AK - AN = AB/2$. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL = AB/2$. Заметим, что треугольники NKL, KCL и CLN равнобедренные.

Пусть $\angle KCL = \alpha$. Тогда $\angle CNL = \alpha$. Угол CKL является внешним в равнобедренном треугольнике NKL, откуда $\angle CKL = 2\alpha$. Получаем, что сумма углов треугольника CKL равна $2\alpha+2\alpha+\alpha$, то есть $\alpha = 36°$. Прямые LM и AC параллельны, откуда $\angle BLM = 36°$. Кроме того, $\angle NLC = 180° - 2\cdot 36° = 108°$. Значит, $\angle NLM = 180° - \angle BLM - \angle NLC = 36°$.

10. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle B = 105°$ расположена точка M, такая что треугольник BMC равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Найдите $\angle BKC$.

Ответ: $45°$.



Решение. Заметим, что $\angle ABM = 45°$, $\angle BCD = 75°$, $\angle MCD = 15°$, $\angle CDM = 30°$, $\angle ADM = 75°$. Докажем, что $AM \perp BM$.

Пусть перпендикуляр в точке M к прямой BM пересекает прямую AB в точке A'. Тогда A' лежит на луче BA и треугольник $BA'M$ прямоугольный равнобедренный. Значит, $MA' = MB = BC$. При этом $\angle A'MD = 360° - 90° - 60° - 135° = 75°$.

При симметрии относительно серединного перпендикуляра к MD лучи DA и MA' меняются местами. Поскольку $DA = MA'$, то точки A' и A меняются местами. Если A не совпадает с A', то прямая AA' перпендикулярна оси симметрии, то есть $AA' \parallel MD$. Это невозможно, так как прямая AA' параллельна CD.

Значит, A совпадает с A'. Тогда KM — медиана прямоугольного треугольника AMB, откуда $KB = KM$. Получаем, что точки K и C лежат на серединном перпендикуляре к BM. Значит, $KC \perp BM$, откуда $\angle BKC = 45°$.