

Иррациональность

1. Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2022}}.$$

2. Пусть a, b, c — рациональные числа, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Докажите, что \sqrt{a}, \sqrt{b} — рациональные числа.
3. Докажите, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — иррационально.
4. При каких натуральных n число $(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n$ будет целым?
5. (а) Найдите $\{44 + \sqrt{2022}\}$.
(б) Чётно или нечётно число $[(44 + \sqrt{2022})^{100}]$?
6. Целые числа m, n таковы, что $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$ — целое число. Верно ли, что оба слагаемых — целые числа?
7. Назовём белыми числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где a, b — целые ненулевые числа, а чёрными — числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$, где c, d — целые ненулевые числа. Может ли чёрное число равняться сумме нескольких белых?