

Теорема Пифагора

1. Дан треугольник со сторонами a , b и c . Докажите, что если медианы, проведенные к сторонам a и b , взаимно перпендикулярны, то $a^2 + b^2 = 5c^2$.
2. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной a . Найдите MN .
3. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и K (точка K лежит между M и B) такие, что $\angle MCK = 45^\circ$. Докажите, что $MK^2 = AM^2 + KB^2$.
4. (а) Разрежьте прямоугольник 1×5 на 5 частей и сложите из них квадрат.
(б) Докажите, что любые два квадрата можно разрезать на части и сложить из них один большой квадрат.
5. Из точки M , лежащей внутри правильного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP , MQ и MR на стороны AB , BC и CA соответственно. Докажите, что:
(а) $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$;
(б) $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$.
6. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N . Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN . Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.
7. Внутри квадрата $ABCD$ выбрали точку X такую, что $AX : BX : CX = 1 : 2 : 3$. Найдите $\angle AXB$.
8. Прямая проходит через точку пересечения диагоналей квадрата со стороной a . Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой.