Дискретная непрерывность

1. В стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

2. На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина — чёрные.
(а) Докажите, что можно разрезать её по границам клеток на две части с равным числом чёрных клеток.
(б) Докажите, что можно разрезать её по границам клеток на две равные части с равным числом чёрных клеток.

3. В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по модулю не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по модулю не превосходит 5.

4. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?

5. За круглым столом сидит чётное количество гномов в колпаках с помпонами, причём, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.

6. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно три простых?

7. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 12345?

8. Маша хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например из числа 12345 можно получить число $12 + 3 + 45 = 60$). С полученным число разрешается сделать подобную операцию и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.

9. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.