Игры

1. **(а)** Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают её на 2 или 3 часа вперёд. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Через 11 часов можно «перепрыгивать». Кто выигрывает при правильной игре?
   (б) А что произойдёт, если ещё разрешить переводить на 4 часа?

2. Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 — можно называть, а 999 — нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Рассматриваются все числа из не более чем 100 цифр, при скольких из них при правильной игре победит второй игрок?

3. Имеется клетчатая шоколадка 322×2022. За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся выше и правее её. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?

4. На доске написано число 5005^{5005}. Двое играют в следующую игру: за один ход можно либо стереть с доски два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведении дающих n, но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. На доске написаны числа от 1 до 10000. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 540000, причём на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В куче N камней. Игроки берут по очереди 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
   (а) Кто из игроков выигрывает при правильной игре?
   (б) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если один раз за игру можно пропустить ход? (Если один игрок пропустил ход, то второй уже больше не может).
   (в) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если ход можно пропустить m раз за игру? (m ходов в сумме на двух игроков).

8. На доске написано число 2. За один ход разрешается прибавить к уже имеющемуся числу любой его делитель, отличный от самого числа. Проигрывает тот, кто первым получит число, большее тысячи. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Даны натуральные $n > k > 1$. Кирилл и Паша по очереди красят клетки квадрата $n \times n$ в чёрный цвет. Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате $k \times k$ будет хотя бы одна чёрная клетка. Кто выигрывает при правильной игре?