Тождественные преобразования

1. Прямоугольник разрезан двумя перпендикулярными прямыми на четыре меньших прямоугольника, которые раскрашены в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. Сумма площадей чёрных прямоугольников равна сумме площадей белых прямоугольников. Докажите, что хотя бы одна из этих прямых делит изначальный прямоугольник пополам.

2. Попарно различные a, b, c таковы, что $a^3 - 3a = b^3 - 3b = c^3 - 3c$. Найдите
(а) $a^2 + ab + b^2$;
(б) $a + b + c$;
(в) $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Числа a, b, c удовлетворяют равенству $(a + b + c)(ab + bc + ac) = abc$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Даны целые a, b, c, d и $n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Докажите, что существуют такие целые x и y, что $n = x^2 + y^2$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Докажите, что ab — точный квадрат.

Замечательное тождество.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Следствие. Если $x + y + z = 0$, то $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

6. Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz.$$

Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3$ делится на $x + y + z + 6$.

7. Пусть a, b, c — действительные числа. Докажите, что если

$$\sqrt[3]{a - b} + \sqrt[3]{b - c} + \sqrt[3]{c - a} = 0,$$

то какие-то два из чисел a, b, c равны.

8. Действительные числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 + 3xy = 1$. Докажите, что или $x + y = 1$, или $x = y = -1$.