

Турниры

Однокруговым называется турнир, в котором любые две команды, участвующие в нём, играют между собой ровно один раз.

В футбольном турнире за победу даётся 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0; в шахматном турнире — за победу 1 очко, за ничью 1/2 очка, за поражение 0; в волейбольном турнире — за победу 1, за поражение 0 (в волейболе ничьих не бывает).

1. В однокруговом футбольном турнире участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли во время турнира быть ровно 8 ничьих?
2. а) В однокруговом шахматном турнире приняло участие 16 человек. Какое наименьшее количество очков мог набрать победитель этого турнира (победителей может быть и несколько)?
б) А если это был волейбольный турнир, в котором приняло участие 16 команд?
3. В однокруговом футбольном турнире приняли участие 16 команд из 16 разных городов. Каждый матч проходил в одном из этих городов. Могло ли по окончании турнира оказаться так, что каждая команда сыграла по одному матчу во всех городах, кроме своего?
4. Во время кругового шахматного турнира двое участников, сыграв поровну партий, заболели и выбыли из турнира. Успели ли они сыграть между собой, если всего было сыграно 23 партии?
5. 16 шахматистов провели турнир в один круг. Оказалось, что все, кроме Гоши, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Гоша или у всех выиграл, или всем проиграл.
6. В турнире математических боёв, проводившемся в один круг, приняли участие 8 команд. Все команды набрали разное количество очков. Команда, занявшая второе место, набрала столько же очков, сколько набрали вместе команды, занявшие места с 5-го по 8-е. Определите, как сыграли между собой команды, занявшие 3-е и 5-е места? (В турнире математических боёв за победу даётся 2 очка, за ничью 1, за поражение 0.)

Задача про составление расписания

7. Астроном наблюдает 50 звёзд, сумма попарных расстояний между которыми равна S . Набежало облако и заслонило 25 звёзд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звёздами меньше, чем $S/2$. (*сразу разберём*)
8. Сумма 1000 действительных чисел равна 0. Докажите, что по крайней мере 999 попарных сумм из этих чисел будут неотрицательными.

9. В круговом турнире по футболу участвовало не менее 6 команд. Все команды набрали равное количество очков. Докажите, что найдутся хотя бы три команды, у которых одинаковое количество побед.
10. Теннисная федерация присвоила всем входящим в неё теннисистам номера: сильнейшему — первый номер, следующему по силе — второй и т.д. Известно, что во встречах теннисистов, номера которых отличаются более, чем на 2, всегда побеждает теннисист с меньшим номером. Турнир, в котором участвуют 1024 сильнейших теннисиста проходит по системе системы плей-офф: участники очередного тура разбиваются по жребию на пары, и в следующий тур выходит победитель в каждой паре. Таким образом после 10 тура будет выявлен победитель. Какой наибольший номер у него может быть?