

## Алгебраические неравенства

1. Даны три действительных числа с ненулевой суммой. Докажите, что сумма трёх попарных произведений из трёх попарных сумм больше суммы их трёх попарных произведений.
2. Докажите неравенства:  
(а)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ; (б)  $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$ , где  $a$  и  $b$  — положительные.
3. Докажите неравенство  $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0$ .
4. (а) Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .  
(б) Докажите, что если положительные числа  $a, b, c$  такие что

$$ab + bc + ca > a + b + c,$$

то

$$a + b + c > 3.$$

5. Неотрицательные числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что

$$12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x).$$

6. Сумма положительных чисел  $a$  и  $b$  не превосходит 1. Докажите неравенство

$$2a^2 + 5ab + 2b^2 \leq \frac{9}{4}.$$

7.  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Докажите, что  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .
8. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1}{1 + a^2 + (b + 1)^2} + \frac{1}{1 + b^2 + (c + 1)^2} + \frac{1}{1 + c^2 + (a + 1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$