Диагностическая работа, 2 этап

1. В лыжной гонке участвовало 50 спортсменов. Они стартовали друг за другом с одинаковыми интервалами, каждый со своей постоянной скоростью. Известно, что каждый лыжник лидировал в некоторый момент гонки. На каком месте финишировал спортсмен стартовавший десятым?

Ответ. 41-ым.

Решение. Рассмотрим двух спортсменов с номерами n и m ($n > m$). Спортсмен m стартовал после спорстмена n и в какой-то момент лидировал, а это значит, что его скорость больше и следовательно спортсмен m финиширует раньше спортсмена n.

Получаем, что из любых двух спортсменов первым пришёл к финишу тот, кто стартовал позже, а значит все спортсмены финифировали в обратном порядке, то есть 10 спортсмен финишировал на 41 месте.

2. Несколько человек построились в колонну, в том числе Андрей, Боря и Вова. Известно, что:

- людей, стоящих впереди Андрея, в 2 раза меньше, чем людей стоящих позади него;
- людей, стоящих впереди Бори, в 3 раза меньше, чем людей стоящих позади него;
- людей, стоящих впереди Вовы, в 4 раза меньше, чем людей стоящих позади него.

Какое наименьшее количество людей может быть в колонне?

Ответ. 61.

Ответ. Обозначим за x количество людей, прибежавших до Андрея, тогда после него прибежало $2x$ людей. Получаем, что всего в забеге был $3x + 1$ участник.

Обозначив за y количество людей, прибежавших до Бори, получим, что всего был $4y + 1$ участник.

Наконец, обозначив за z количество людей, прибежавших до Вовы, получим, что всего был $5z + 1$ участник.

Если из общего числа бегунов вычесть 1, должно получиться число, делящееся на 3, 4 и 5. Наименьшее такое число равно 60, следовательно, участников было не меньше 61.

Осталось заметить, что для 61 участника условие могло выполняться. Например, если среди них Андрей прибежал 21-м, Боря — 16-м, а Вова — 13-м.

3. У Ани есть карточки с числами от 1 до 40. Она расставляет их в некотором порядке по кругу. После этого мама считает 40 разностей двух соседних чисел (из большего числа вычитает меньшее) и находит среди них наименьшую. После этого мама даёт Ане столько конфет, чему равна данная разность. Какое наибольшее количество конфет может себе гарантировать Аня?

Ответ. 19.

Решение. Докажем, что Аня не сможет получить 20 конфет. Посмотрим на карточку с числом 20. Число 20 отличается от всех оставшихся чисел, кроме числа 40, не более, чем на 19. Таким образом, хотя бы одна из разностей, в которых участвует число 20, будет не более 19.

Приведём пример расстановки, когда Аня сможет получить 19 конфет. Расставим по кругу числа в следующем порядке: 1, 21, 2, 22, 3, 23, ..., 19, 39, 20, 40.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $\angle ABC = 2\angle ADC$. На луче BA за точкой A отметили точку P такую, что $AP = BC$.
(а) *(4 балла)* Докажите, что $AD = AB + BC$.
(б) *(3 балла)* Докажите, что треугольник CPD равнобедренный.

Решение. Продлим AB и DC до пересечения в точке E. Треугольник BEC равнобедренный, так как $\angle BEC = \angle ABC - \angle BCE = \angle ABC - \angle ADC = \angle ADC = \angle ECB$. Треугольник AED тогда тоже равнобедренный, так как его углы равны углам треугольника BEC из параллельности. Получаем $AD = AE = AB + BE = AB + BC$.

Докажем, что треугольники BPC и ADP равны. Имеем $\angle PBC = \angle DAP$, $BC = AP$, $BP = BA + BP = BA + BC = AD$. Из равенства этих треугольников получаем $PD = PC$, то есть треугольник CPD равнобедренный.

5. В ряд положили 75 монет, какие-то орлом вверх, остальные — решкой. Известно, что любые две монеты между которыми ровно 5 других монет лежат по-разному (одна решкой вверх, а другая — орлом). Какое наибольшее количество монет может лежать орлом вверх?

Ответ. 39.

Решение. Разобьём все монеты на 6 групп по 12 подряд идущих монет и ещё 1 группу из 3 оставшихся монет. Заметим, что в одной группе из 12 монет будет ровно 6 орлов и 6 решек, в каждой паре: 1 и 7 монеты, 2 и 8 монеты, ..., 6 и 12 монеты будет ровно один орёл и одна решка по условию. В группе из трёх монет максимум три орла, всего максимум $6 \cdot 6 + 3 = 39$ орлов.

Осталось показать, что 39 орлов могло быть. Расположим монеты в следующем порядке: О, О, О, О, О, О, Р, Р, Р, Р, Р, Р, О, О, О, О, О, О, ..., Р, Р, Р, Р, Р, Р, О, О, О. Чередуются шестёрки орлов и решек и в конце три орла.

6. На плоскости отметили 13 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Дима посчитал все неравнобедренные треугольники с вершинами в данных точках. Докажите, что у него получилось не менее 130.

Решение. У каждого равнобедренного треугольника выделим основание (если треугольник равносторонний, то выделим любую сторону). Докажем, что таким обазом каждый отрезок будет выделен не более двух раз.

Возьмём две произвольные точки A и B. Предположим, что отрезок AB был выделен хотя бы три раза в треугольниках с вершинами C, D и E. Тогда заметим, что точки C, D и E лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB (т. к. в равнобедренных треугольниках совпадает медиана и высота), но по условию никакие три точки не лежат на одной прямой, противоречие.

Посчитаем наибольшее возможное количество равнобедренных треугольников. Всего отрезков $C_{13}^2 = \frac{13\cdot 12}{2} = 78$, каждый из них является основанием не более, чем в двух равнобедренных треугольниках, и следовательно их не более $78 \cdot 2 = 156$. Всего треугольников на 13 вершинах ровно $C_{13}^3 = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{6} = 286$, а значит неравнобедренных треугольников хотя бы $286 - 156 = 130$.