Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Комбинаторные свойства

1. Найдите количество слов длины n, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд.

2. Есть доска $2 \times n$. Сколькими способами её можно замостить домино?

3. Длины 13 отрезков являются натуральными числами, меньшими 225. Докажите, что среди них найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник.

4. Рассмотрим последовательность 0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, ... Каждое следующее число получается из предыдущего так: каждый 0 заменяется на 1, каждая 1 — на 10.
(а) Рассмотрим другое описание данной последовательности. Каждое следующее число получается так: берём последнее число и приписываем к нему справа предыдущее. Докажите, что эти два описания задают одну и ту же последовательность.
(б) Найдите количество нулей и количество единиц в n-м числе.

5. Из чисел от 1 до 144 загадано одно. Разрешается выбрать подмножество чисел и спросить, есть ли среди них загаданное. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы угадать число?

Алгебраические свойства

6. Докажите, что:
(а) $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
(б) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$;
(в) $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

7. Докажите, что сумма пяти последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи.

8. Найдите чему равна сумма: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

9. **(а)** Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.
(б) Докажите, что для любых натуральных m и n верно $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$.
(в) Докажите, что для любых натуральных m и n верно $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

10. **(а)** Докажите, что для любого n существует $k > 2$ такое, что $F_k \equiv 1 \pmod{n}$.
(б) Докажите, что для любого n существует $k > 2$ такое, что $F_k \equiv 0 \pmod{n}$.
(в) Пусть m — наименьший номер, при котором число Фибоначчи F_m кратно n. Докажите, что все числа Фибоначчи, кратные n, имеют номера, кратные m.