

Защикливание и периодичность

- Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите что последовательность
(а) периодична;
(б) с периодом длины не больше 16.
- Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.
- Докажите, что при переводе обыкновенной дроби в десятичную получается периодическая десятичная дробь.
- Дана последовательность 2, 0, 7, 7, 6, 0, 0, 3, ... и т. д., в ней каждый новый член равен последней цифре суммы четырёх предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности встретится кусок
(а) 2, 0, 7, 7;
(б) 4, 3, 7, 8.
- В тридцатом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрёстка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадёт таким образом обратно в свой замок.
- На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст.
- По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.
(а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.
(б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?