Сравнения по модулю

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю* m, если

- они имеют одинаковые остатки при делении на m;
- их разность делится на m (что равносильно предыдущему условию).

Свойства сравнений.

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
4. Если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Найдите остаток от деления

(а) 47^{101} на 46 и 48; **(б)** $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2023;

(в) 47^{101} на 31; **(г)** $9^{2020} + 13^{2020}$ на 11; **(д)** $51! + \frac{102!}{51!}$ на 103.

2. Докажите, что $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 2020^{101}$ делится на 2021.

3. У числа 2021^{2021} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр, и т.д., пока не получилась цифра. Что это за цифра?

4. Натуральные числа a и b таковы, что $N = (84a + 17b)(17a + 84b) \,\vdots\, 101$. Докажите, что $N \,\vdots\, 10201$.

5. Докажите, что $(3^n - 1)^n - 4 \,\vdots\, 3^n - 4$ для любого натурального n.

6. При каких натуральных n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

7. Целые числа x и y таковы, что $23x + 30y$ даёт остаток 1 при делении на 91. Какой остаток при делении на 91 даёт $x + 29y$?

8. Для натуральных чисел s и n докажите, что $s^{2n+3} + (s-1)^n \,\vdots\, s^2 - s + 1$.

9. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)