

## Комбинаторная теория чисел

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько и расставить между ними знаки плюс и минус так, чтобы полученная алгебраическая сумма делилась на 1001.
2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечетное число  $l$ , не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на  $l$ .
3. (а) Дано  $n$  целых чисел.  
(б) Дано  $n - 1$  целое число. Среди них не все попарно сравнимы по модулю  $n$ .  
(в) Дано  $n - 2$  целых числа. Среди них нет  $n - 3$  попарно сравнимых по модулю  $n$ . Докажите, что среди них найдутся несколько с суммой, делящейся на  $n$ .
4. Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 100.
5. 2022 натуральных числа имеют в совокупности 2021 простой делитель. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.
6. Из чисел от 1 до  $2n$  выбрано  $n + 1$  число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
7. Есть ли 2021-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2021 разных 2021-значных полных квадратов?