

Раскраски

1. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Какое минимальное количество незанятых клеток могло при этом получиться?
2. Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить их все в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?
3. Можно ли замостить таблицу 2017×2017 доминошками 1×2 , которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3 , которые разрешается располагать только вертикально?
4. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трёх клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?
5. На клетчатой плоскости отмечено 100 клеток. Докажите, что можно отметить среди них 25 клеток так, чтобы они не имели общих точек.
6. (а) Из доски 8×8 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.
(б) Тот же вопрос, только для доски 11×11 и прямоугольников 1×4 .
7. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трёх клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?
8. Петя и Вася играют в игру на решётке в виде сот. Петя закрашивает в чёрный цвет два соседних шестиугольника, а Вася стирает один любой закрашенный. Какое максимальное количество закрашенных шестиугольников подряд может гарантированно получить Петя?
9. В 17 клеток квадрата 5×5 поставили по одной фишке. За один ход все фишки передвигаются в соседнюю по стороне клетку. Запрещается ставить две фишки в одну клетку и, если фишка передвигалась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвинуться по вертикали, и наоборот. Может ли процесс продолжаться сколько угодно долго?