

## Раскраски

1. На каждой клетке доски размером  $9 \times 9$  сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Какое минимальное количество незанятых клеток могло при этом получиться?
2. Квадрат  $8 \times 8$  клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить их все в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?
3. Можно ли замостить таблицу  $2017 \times 2017$  доминошками  $1 \times 2$ , которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками  $1 \times 3$ , которые разрешается располагать только вертикально?
4. Квадрат  $9 \times 9$  разрезан на квадраты  $2 \times 2$  и «уголки» из трёх клеток. Какое наибольшее количество квадратов  $2 \times 2$  могло при этом получиться?
5. На клетчатой плоскости отмечено 100 клеток. Докажите, что можно отметить среди них 25 клеток так, чтобы они не имели общих точек.
6. (а) Из доски  $8 \times 8$  вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники  $1 \times 3$ . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.  
(б) Тот же вопрос, только для доски  $11 \times 11$  и прямоугольников  $1 \times 4$ .
7. Можно ли прямоугольник  $5 \times 7$  покрыть уголками из трёх клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?
8. Петя и Вася играют в игру на решётке в виде сот. Петя закрашивает в чёрный цвет два соседних шестиугольника, а Вася стирает один любой закрашенный. Какое максимальное количество закрашенных шестиугольников подряд может гарантированно получить Петя?
9. В 17 клеток квадрата  $5 \times 5$  поставили по одной фишке. За один ход все фишки передвигаются в соседнюю по стороне клетку. Запрещается ставить две фишки в одну клетку и, если фишка передвигалась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвинуться по вертикали, и наоборот. Может ли процесс продолжаться сколько угодно долго?