Упорядочивание

1. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

3. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $2n-3$ различных точек.

4. На дискотеке n юношей танцевали с n девушками. В каждой паре юноша был выше девушки, но не более, чем на 10 см. Докажите, что если поставить танцевать самого высокого юношу с самой высокой девушкой, второго по росту — со второй, и т. д., то по прежнему в каждой паре юноша будет выше девушки и опять же не более, чем на 10 см.

5. На прямой дано $2n+1$ отрезоков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.

6. **(а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
(б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

7. Обозначим через a и A соответственно наименьшее и наибольшее из n различных натуральных чисел.
(а) Докажите, что НОК всех чисел не меньше na.
(б) Докажите, что НОД всех чисел не больше A/n.

8. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 ($n > 2$). Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.