Вступительный тест. Решения

1. Несколько ребят делили апельсины. Если раздать каждому по 6 апельсинов, то останется 4 лишних. А если попытаться раздать по 7, то не хватит 5 штук. Сколько всего было апельсинов?

Ответ: 58.

Решение 1. Обозначим количество детей за x. Тогда по условию мы получаем, что количество апельсинов с одной стороны равно $6x + 4$, а с другой — $7x - 5$. Приравнивая данные выражения, получаем $x = 9$, и следовательно количество апельсинов равно $9 \cdot 6 + 4 = 58$.

Решение 2. Рассмотрим ситуацию, когда каждому ребёнку раздали по 6 апельсинов. Теперь начнём каждому ребёнку выдавать по одному апельсину (чтобы у каждого стало 7). По условию получаем, что, если выдать четырём из них по апельсину, останется ещё 5 ребят, которые не получили новый апельсин. Таким образом получаем, что всего детей $4 + 5 = 9$, и $9 \cdot 6 + 4 = 58$ апельсинов.

2. На складе лежат арбузы и дыни, причём арбузов среди них ровно 50%. Сначала на склад доставили новые дыни и арбузов стало ровно 10%. Потом доставили арбузы и их стало ровно 40%. Во сколько раз увеличилось количество арбузов?

Ответ: 6.

Решение. Обозначим начальное количество арбузов за n, тогда и начальное количество дынь тоже равно n. После доставки новых дынь останется n арбузов, и дынь станет $9n$. После доставки новых арбузов останется $9n$ дынь, и арбузов станет $6n$. Количество арбузов увеличилось в 6 раз.

3. На столе лежит четыре шкатулки, по одной шкатулке с изумрудами, рубинами, янтарём и кварцем. Шкатулки пронумерованы числами от 1 до 4, и на каждой из них была надпись.

- Первая шкатулка: «Во второй шкатулке кварц».
- Вторая шкатулка: «Изумруды не в этой шкатулке».
- Третья шкатулка: «Здесь лежат рубины».
- Четвёртая шкатулка: «Янтарь лежит в 1-й или 2-й шкатулке».

Оказалось, что на двух шкатулках с драгоценными камнями (с изумрудами и с рубинами) надписи ложные, а на двух других (с янтарём и с кварцем) верные. Определите, в какой шкатулке что лежит.

(a) В первой шкатулке — **(1)** лежат изумруды
(b) Во второй шкатулке — **(2)** лежат рубины
(c) В третьей шкатулке — **(3)** лежит янтарь
(d) В четвёртой шкатулке — **(4)** лежит кварц

Ответ: $a2$, $b3$, $c1$, $d4$.

Решение. Посмотрим на третью шкатулку. В ней не может лежать кварц или янтарь, иначе на шкатулке была бы написана ложь, что противоречит условию. Аналогично там не могут лежать рубины, иначе на шкатулке была бы написана правда, что также противоречит условию. Получаем, что в третьей шкатулке точно лежат изумруды.

Теперь посмотрим на четвёртую шкатулку. Если бы в ней лежали рубины, то янтарь точно лежал бы где-то в первой или второй шкатулке, а значит, на четвёртой шкатулке была бы написана правда, противоречие. Поэтому в этой шкатулке кварц или янтарь, то есть на ней написана правда, и янтарь лежит где-то в первой или второй шкатулке. Тогда остаётся только вариант, когда в ней лежит кварц.

Осталось понять, что рубины не могут лежать в первой шкатулке, иначе кварц во второй и на рубинах написана правда, что противоречит условию. Получаем, что в первой шкатулке кварц, а во второй рубины.

4. Алина, Белла, Василиса и Галина участвовали в телепередаче «Угадай цену». В одном раунде показывают некоторый предмет, а участницы пытаются угадать, сколько он стоит. За самый близкий ответ даётся 10 баллов, за второй по близости — 7 баллов, за третий — 3 балла, а за четвёртый ничего. (Одинаковые цены участницы не называли).

По итогу 10 раундов выяснилось, что сумма баллов Алины и Василисы равна сумме баллов Беллы и Галины. Сколько баллов у Алины, если известно, что она набрала в 3 раза больше, чем Василиса?

Ответ: 75.

Решение. Заметим, что за один раунд участницы в сумме набирают 20 баллов, следовательно за 10 раундов они в сумме наберут 200 баллов. По условию сумма баллов Алины и Василисы равна сумме баллов Беллы и Галины, значит, у каждой пары ровно по 100 баллов.

Осталось поделить 100 баллов в отношении $1 : 3$ и получить, что у Алины 25 баллов, а у Василисы 75.

(Следует отметить, что такая ситуация возможна, например, когда Алина набрала 10, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0 баллов, а Василиса — 7, 7, 7, 7, 7, 0, 10, 10, 10, 10 баллов в соответствующих турах.)

5. На доску выписано несколько натуральных чисел, не превосходящих 130. Оказалось, что числа 1 и 2 выписаны и ни одно из выписанных чисел не равно сумме двух различных выписанных чисел. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

Ответ: 45.

Решение. Оценка. Рассмотрим тройки чисел: $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$, …, $(127, 128, 129)$ — всего 42 тройки. Из каждой тройки не может быть выписано больше одного числа, так как иначе меньшее из двух чисел вместе с 1 или 2 в сумме будет равно большему. Таким образом, выписано не больше $42 + 3 = 45$ чисел.

Пример. 1, 2, 4, 7, …, 130. Этот пример подходит, так как все эти числа, кроме 2, дают остаток 1 при делении на 3, а значит, сумма никаких двух из них не может быть равна третьему. Число 2 также не может в сумме ни с каким из этих чисел давать третье число. Разность между всеми числами, отличными от 2, хотя бы 3.

6. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых 12 из них нашлись две, образующие угол в 90°?

Ответ: 22.

Решение. Пример. 11 параллельных прямых и 11 прямых, перпендикулярных им. Тогда понятно, что, если выбрать 12 прямых, то среди них будут как минимум две не параллельные прямые, а значит, они будут перпедикулярны.

Оценка. Пусть есть n прямых, обладающих указанным в задаче свойством. Покрасим одну из них в синий цвет, все параллельные ей — тоже в синий, а все перпендикулярные им — в красный цвет. Если после этого остались непокрашенные прямые — будем повторять процедуру, раскрашивая следующие несколько прямых в синий и красный цвет, пока все прямые не будут покрашены. Заметим, что перпендикулярными могут быть только разноцветные прямые. Если $n \geqslant 23$, у нас найдутся 12 одноцветных прямых. Поэтому общее количество прямых не может быть больше 22.

7. Найдите четвёрку натуральных чисел a, b, c, d таких, что $a < b < c < d$ и $a + b + c + d - 3 = ad = bc$. Достаточно привести один пример.

Ответ: 2, 3, 4, 6.

Решение. Докажем, что приведённый пример единственный.

d — наибольшее из чисел, тогда $ad = a+b+c+d-3 < 4d$. Значит $a < 4$. Рассмотрим три случая.

Если $a = 3$, то $b + c + d = 3d$. Следовательно, $b + c = 2d$, что невозможно (т. к. $b < d$, $c < d$, откуда $b + c < 2d$).

Если $a = 2$, то $b + c + d - 1 = 2d$. Следовательно, $d = b + c - 1$. Подставим в исходное равенство:

$$2 + b + c + (b + c - 1) - 3 = bc,$$
$$2b + 2c - 2 = bc,$$
$$(b - 2)(c - 2) = 2.$$

Так как $2 < b < c$, то обе скобки положительные и $b - 2 = 1$, $c - 2 = 2$. Тогда $b = 3$, $c = 4$, $d = 3 + 4 - 1 = 6$. Получается пример из ответа.

Если $a = 1$, то $b + c + d - 2 = d$. Следовательно, $b + c = 2$, чего быть не может, так как b и c не менее 2.

8. Каждое из чисел 73, 216 и 293 поделили с остатком на некоторое натуральное число N, большее 1. В результате при каждом из этих делений получились одинаковые остатки. Какой остаток получится, если 107 поделить на N?

Ответ: 8.

Решение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на N, то их разность делится на N. Значит, $216 - 73 = 143 \vdots N$ и $293 - 216 = 77 \vdots N$. Так как $143 = 11 \cdot 13$, $77 = 7 \cdot 11$, то единственный общий делитель чисел 143 и 77, больший 1 — это 11. При делении 107 на 11 получается остаток 8.

9. Есть бассейн, полностью наполненный водой. Также есть несколько кранов, набирающих воду в бассейн с одинаковой постоянной скоростью. Если открыть слив в бассейне и 8 кранов, набирающих воду, то вся вода вытечет за 60 минут, а если открыть слив и 5 кранов, то вся вода вытечет за 24 минуты. За сколько минут вытечет вся вода из бассейна, если открыть слив и не открывать ни одного крана?

Ответ: 12.

Решение. Обозначим объём воды за V литров, скорость вытекания воды за y л/мин, а скорость наполнения из крана за x л/мин. Тогда по условию нам дано два уравнения:

$$\frac{V}{y - 8x} = 60\,, \qquad \frac{V}{y - 5x} = 24\,.$$

Домножим оба равенства на знаменатели

$$V = 60(y - 8x)\,, \qquad V = 24(y - 5x)\,.$$

Домножим второе равенство на 4 и вычтем из него первое, тогда получим $3V = 36y$, откуда $\frac{V}{y} = 12$. Это и есть время, за которое выльется вся вода без открытых кранов.

10. Паук сплёл паутину в виде прямоугольной сетки 10×13. Он прополз всевозможными способами из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь по линиям сетки. Во сколько раз количество путей, у которых первый участок горизонтальный, больше, чем количество путей, у которых первый участок вертикальный.

Ответ: 1,3.

Решение. Для того, чтобы попасть в правый верхний угол, пауку нужно совершить 10 вертикальных и 13 горизонтальных перемещений в произвольном порядке.

Если первый участок горизонтальный, то из оставшихся 22 участков 10 могут быть вертикальными. Количество таких комбинаций $C_{22}^{10} = \dfrac{22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 13}{10!}$.

Если первый участок вертикальный, то из оставшихся 22 участков 9 могут быть вертикальными. Количество таких комбинаций $C_{22}^{9} = \frac{22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14}{9!}$.

Таким образом, путей, где первый участок горизонтальный, больше в

$$\frac{22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 13}{10!} : \frac{22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14}{9!} = \frac{13}{10} = 1{,}3$$

раза.