

## Диагностическая работа

**Задача 1.** Дан невырожденный треугольник с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Известно, что числа  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  рациональны. Докажите, что числа  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  тоже рациональны.

**Задача 2.** В стране не менее 100 городов. Между любыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет. Известно, что из каждого города ведёт не более 100 дорог, а также среди любых 100 городов обязательно найдутся какие-то два, между которыми есть дорога. Какое наибольшее количество городов может быть в этой стране?

**Задача 3.** У Вани есть 1000 различных карточек, на каждой из которых написано натуральное число, не превосходящее 1000 (на разных карточках — разные числа). Ваня хочет выбрать несколько карточек и отдать их Лёше так, чтобы у каждого из мальчиков сумма чисел на любых двух карточках не была равна степени двойки. Сколькими способами Ваня может это сделать?

**Задача 4.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . Точки  $M$  и  $N$  симметричны точке  $D$  относительно вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ABN$  и  $ACM$  пересекаются в точке  $X$ . Прямые  $AB$  и  $AC$  пересекают отрезки  $MX$  и  $NX$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Докажите, что  $B_1C_1 \parallel BC$ .

**Задача 5.** Действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$  таковы, что  $9a_i \geq 11a_{i+1}^2$  для всех  $i = 1, 2, \dots, 2020$ . Найдите наибольшее возможное значение величины

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \dots (a_{2020} - a_{2021}^2)(a_{2021} - a_1^2).$$