Отборочная олимпиада. 2 тур

Задача 1. На доске написаны числа 2021, 2022, ..., 4042. Саша и Толя играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За ход можно стереть с доски одно из чисел и написать вместо него два натуральных числа с такой же суммой. Тот, после чьего хода все числа на доске станут равными, выигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Саша?

Задача 2. Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не меньшие 1. Докажите, что

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Задача 3. Треугольник ABP вписан в окружность ω. Точки E и F на стороне AB таковы, что $AE = EF = FB$. Лучи PE и PF вторично пересекают ω в точках C и D соответственно. Докажите, что $EF \cdot CD = AC \cdot BD$.

Задача 4. Дано натуральное m. Может ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{111\ldots11}_{m}$, иметь сумму цифр меньше m?

Задача 5. Найдите наибольшее целое k, для которого всегда верно следующее утверждение.

Вася нарисовал 2021 невырожденный треугольник. В каждом из них он покрасил одну сторону синим цветом, другую — красным, а третью — зелёным. Стороны каждого цвета Вася упорядочил по возрастанию:

- $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{2021}$ — длины синих сторон;
- $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2021}$ — длины красных сторон;
- $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{2021}$ — длины зелёных сторон.

Тогда существует хотя бы k таких индексов j, что существует невырожденный треугольник со сторонами a_j, b_j, c_j.