Отборочная олимпиада. 2 тур

Задача 1. На доске написаны числа 2021, 2022, ..., 4042. Саша и Толя играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За ход можно стереть с доски одно из чисел и написать вместо него два натуральных числа с такой же суммой. Тот, после чьего хода все числа на доске станут равными, выигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Саша?

Решение. Саше для победы достаточно первым ходом из числа 2021 получить числа 1 и 2020. Ясно, что такая игра закончится только тогда, когда все числа на доске станут единицами. Поскольку для превращения числа n в n единиц требуется $n-1$ ходов, всего в игре будет сделано $2020 + 2021 + \ldots + 4041$ ходов. Эта сумма нечётна (в ней нечётное число нечётных слагаемых), поэтому последний ход сделает Саша, и он победит.

Другое решение. Заметим, что сумма всех чисел на доске в процессе игры не меняется. Она равна $\frac{(4042+2021)\cdot 2022}{2} = 6063 \cdot 1011$, т.е. нечётна. Если в конце игры все k чисел оказались равны x, то их сумма kx нечётна, поэтому и k нечётно. Заметим, что после Сашиного хода количество чисел на доске всегда нечётно, а после Толиного — чётно. Поскольку игра конечна (с каждым ходом количество натуральных чисел увеличивается, а их сумма не меняется), она может закончиться только после хода Саши. Значит, Саша побеждает при любых действиях игроков. □

Задача 2. Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не меньшие 1. Докажите, что
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Решение. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ обозначим $a_i = 1 + x_i$ для некоторого неотрицательного x_i. Тогда
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{n}(2+x_k) = 2^n + 2^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{\ldots}_{\geqslant 0} \geqslant$$
$$\geqslant 2^n + 2^{n-1} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(n+1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$
что и требовалось.

Другое решение. Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n=1$ неравенство обращается в равенство. Для перехода надо доказать, что
$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geqslant \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1}).$$
Для этого достаточно доказать, что
$$\frac{2^n}{n+1} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1}) \geqslant \frac{2^{n+1}}{n+2} \cdot \left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right).$$
Сократив на 2^n обе части и домножив их на знаменатели, получим
$$(n+2)\left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1}) \geqslant 2(n+1)\left(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right).$$
Из правой части перенесём влево $(2n+2)(1+\sum_{k=1}^{n} a_k)$, получим
$$\left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(n+2+na_{n+1}+2a_{n+1}-2n-2) \geqslant (2n+2)a_{n+1}.$$
Поскольку $a_i \geqslant 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n+1$, получаем, что в левой части первая скобка не меньше $n+1$, а вторая не меньше $2a_{n+1}$, тогда их произведение действительно не меньше $(2n+2)a_{n+1}$, что и требовалось.

Замечание. Также эта задача является несложным упражнением на метод Штурма. □

Задача 3. Треугольник ABP вписан в окружность ω. Точки E и F на стороне AB таковы, что $AE = EF = FB$. Лучи PE и PF вторично пересекают ω в точках C и D соответственно. Докажите, что $EF \cdot CD = AC \cdot BD$.

Решение. По теореме синусов отношение двух сторон в треугольнике равно отношению синусов противолежащих им углов. Тогда
$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD} = \frac{\sin\angle APC}{\sin\angle CPD} = \frac{\frac{\sin\angle APE}{\sin\angle AEP}}{\frac{\sin\angle EPF}{\sin\angle FEP}} = \frac{\frac{AE}{AP}}{\frac{EF}{FP}} =$$
$$= \frac{FP}{AP} = \frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle AFP} = \frac{\sin\angle FDB}{\sin\angle DFB} = \frac{FB}{BD} = \frac{EF}{BD},$$

откуда и получаем $EF \cdot CD = AC \cdot BD$.

Другое решение. Пусть $\angle PDB = \angle PCB = \alpha$, $\angle ACP = \angle ADP = \beta$. Тогда

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot DF \sin\beta \sin\alpha}{\frac{1}{2}BD \cdot DF \sin\alpha \sin\beta} = \frac{S_{ADF}\sin\alpha}{S_{BDF}\sin\beta} = 2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Аналогично, $\dfrac{BC}{AC} = 2 \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Из этих двух равенств получаем, что

$$AC \cdot BD = \frac{1}{4}AD \cdot BC.$$

(Это же можно было доказать и несколькими подобиями треугольников.) Из теоремы Птолемея для $ABDC$ имеем $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$, откуда следует, что $AB \cdot CD = \frac{3}{4}AD \cdot BC$ и $AC \cdot BD = \frac{1}{3}AB \cdot CD = EF \cdot CD$.

Третье решение. Воспользуемся двойными отношениями. Ясно, что $(A, F; E, B) = (A, D; C, B)$, поэтому

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FB}{AB} = \frac{AE}{EF} : \frac{AB}{FB} = \frac{AC}{CD} : \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \cdot \frac{BD}{AB},$$

откуда и получаем $EF \cdot CD = AC \cdot BD$. □

Задача 4. Дано натуральное m. Может ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{111\ldots11}_{m}$, иметь сумму цифр меньше m?

Решение. Обозначим $A = \underbrace{111\ldots11}_{m}$. Предположим, что существует некоторое натуральное B, делящееся на A, имеющее сумму цифр меньше m.

Заметим, что $10^m - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{m}$ делится на A, т.е. $10^m \equiv 1 \pmod{A}$. Если в числе B больше m разрядов, цифру s в самом левом из них перенесём на m разрядов вправо, т.е. рассмотрим новое число $B' = B - s \cdot 10^{k+m} + s \cdot 10^k$, где $s \cdot 10^{k+m}$ — старший разряд числа B. Очевидно, что B' также делится на A. Если при этом в числе B' в каком-то разряде окажется число больше 9, то можно перенести из него единичку в следующий разряд (уменьшив число в текущем разряде на 10). Будем продолжать такие операции, пока число не окажется меньше 10^m. Ясно, что при таких операциях у каждого нового числа делимость на A сохраняется, при этом его сумма цифр не увеличивается, и она не больше суммы цифр исходного числа B.

Таким образом, если существует какое-то число B, делящееся на A, с суммой цифр меньше m, то существует и натуральное $C < 10^m$ с таким же свойством. Поскольку C делится на A, то $C = A \cdot c$, где $1 \leqslant c \leqslant 9$. Но тогда $C = \underbrace{ccc\ldots cc}_{m}$, и его сумма цифр $cm \geqslant m$, противоречие. □

Задача 5. Найдите наибольшее целое k, для которого всегда верно следующее утверждение.

Вася нарисовал 2021 невырожденный треугольник. В каждом из них он покрасил одну сторону синим цветом, другую — красным, а третью — зелёным. Стороны каждого цвета Вася упорядочил по возрастанию:

- $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{2021}$ — длины синих сторон;
- $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2021}$ — длины красных сторон;
- $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{2021}$ — длины зелёных сторон.

Тогда существует хотя бы k таких индексов j, что существует невырожденный треугольник со сторонами a_j, b_j, c_j.

Решение. Докажем, что наибольшее такое k равно 1.

Докажем, что $j = 2021$ всегда подойдёт (т.е все 3 неравенства треугольника для чисел a_{2021}, b_{2021}, c_{2021} выполнены). Действительно,

$$a_{2021} < b_r + c_l \leqslant b_{2021} + c_{2021},$$

где b_r и c_l — это стороны, участвующие с a_{2021} в исходном треугольнике. Аналогично проверяются два других неравенства.

Приведём пример, когда никакое другое j не подходит. Пусть исходные треугольники имели стороны $(4, 2, 5)$, $(5, 2, 6)$, $(6, 2, 7)$, $\ldots$, $(2023, 2, 2024)$, $(3, 10000, 10000)$, и в каждом из них первая сторона — синяя, вторая — красная, третья — зелёная. Тогда

$$a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5, \ldots, a_{2020} = 2022, a_{2021} = 2023,$$

$$b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = 2, \ldots, b_{2020} = 2, b_{2021} = 10000,$$

$$c_1 = 5, c_2 = 6, c_3 = 7, \ldots, c_{2020} = 2024, c_{2021} = 10000.$$

Видно, что треугольник можно составить только из сторон с одинаковыми индексами 2021. □