Отборочная олимпиада. 1 тур. Решения

Задача 1.1. Последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 + a_2 = 4000$ и $a_{n-1}a_{n+1} = a_n$ для всех $n = 2, 3, 4, \ldots$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_{4000} + a_{4001}$.

Ответ: 0.001.

Решение. Заметим, что $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, откуда

$$a_3 = \frac{a_2}{a_1},\ a_4 = \frac{1}{a_1},\ a_5 = \frac{1}{a_2},\ a_6 = \frac{a_1}{a_2},\ a_7 = a_1,\ a_8 = a_2.$$

Получается, что последовательность периодична с периодом 6. Так как 4000 даёт остаток 4 при делении на 6, то

$$a_{4000} + a_{4001} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}.$$

Так как сумма a_1 и a_2 фиксирована, то наибольшее значение произведения a_1a_2, а значит и наименьшее значение $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}$, будет достигаться при $a_1 = a_2 = 2000$. Отсюда минимальное значение суммы $a_{4000} + a_{4001}$ равно $\frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{1}{1000}$.

$\square$

Задача 1.2. Последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 + a_2 = 1000$ и $a_{n-1}a_{n+1} = a_n$ для всех $n = 2, 3, 4, \ldots$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_{1000} + a_{1001}$.

Ответ: 0.004.

Задача 1.3. Последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 + a_2 = 1000$ и $a_{n-1}a_{n+1} = a_n$ для всех $n = 2, 3, 4, \ldots$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_{4000} + a_{4001}$.

Ответ: 0.004

Задача 1.4. Последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 + a_2 = 4000$ и $a_{n-1}a_{n+1} = a_n$ для всех $n = 2, 3, 4, \ldots$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_{1000} + a_{1001}$.

Ответ: 0.001.

Задача 2.1. Кирилл хочет поставить на 56 различных клеток шахматной доски 8×8 по фишке так, чтобы на всех белых клетках стояла фишка, а в каждом столбце и в каждой строке стояло ровно 7 фишек. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 576.

Решение. Занумеруем строки и столбцы таблицы числами от 1 до 8 так, чтобы у чёрных клетков сумма номеров строки и столбца была чётной. Рассмотрим по одной клетке в каждом столбце и каждой строке, в которых не будут стоять фишки. Все эти клетки по условию должны быть чёрными. Если посмотреть на строки с чётными номерами, то соответствующие им столбцы (т.е. содержащие рассмотренную в этой строке клетку) тоже должны иметь чётный номер. Таким образом, нам нужно выбрать в этом квадрате 4×4 (образованном пересёчениями чётных строк и чётных столбцов) ладейную расстановку, и количество способов это сделать равно $4!$. Аналогично для нечётных строк и столбцов. Эти варианты друг от друга независимы, поэтому всего получаем $(4!)^2 = 576$ вариантов. □

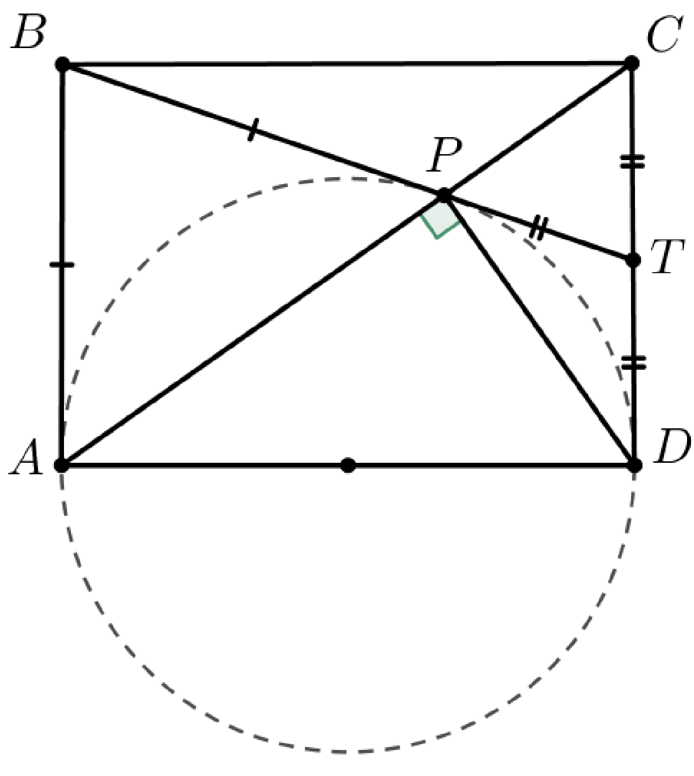
Задача 2.2. Кирилл хочет поставить на 90 различных клеток шахматной доски 10×10 по фишке так, чтобы на всех белых клетках стояла фишка, а в каждом столбце и в каждой строке стояло ровно 9 фишек. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 14400.

Задача 3.1. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность ω, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает отрезок AC в точке P, но не пересекает отрезок BC. На стороне CD нашлась точка T такая, что прямая BT касается ω в точке P. Найдите AB, если $BT = 180$.

Ответ: 120.

Решение. Так как AD — диаметр ω, а P — точка на ω, то угол APD — прямой. Заметим, что $PT = TD$ как отрезки касательных, откуда PT — медиана в прямоугольном треугольнике CPD. Значит, $PT = \frac{CD}{2}$. Кроме того, $BP = BA$ как отрезки касательных, откуда $BT = \frac{3}{2}AB$, то есть $AB = 120$.



$\square$

Задача 3.2. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность ω, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает отрезок AC в точке P, но не пересекает отрезок BC. На стороне CD нашлась точка T такая, что прямая BT касается ω в точке P. Найдите AB, если $BT = 240$.

Ответ: 160.

Задача 3.3. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность ω, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает отрезок AC в точке P, но не пересекает отрезок BC. На стороне CD нашлась точка T такая, что прямая BT касается ω в точке P. Найдите AB, если $BT = 120$.

Ответ: 80.

Задача 3.4. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность ω, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает отрезок AC в точке P, но не пересекает отрезок BC. На стороне CD нашлась точка T такая, что прямая BT касается ω в точке P. Найдите AB, если $BT = 60$.

Ответ: 40.

Задача 4.1. В остроугольном треугольнике ABC напротив углов A, B, C лежат стороны a, b, c соответственно. Известно, что $a\cos\angle B - b\cos\angle A = \frac{3}{5}c$. Найдите $\frac{\operatorname{tg}\angle B}{\operatorname{tg}\angle A}$.

Ответ: 1/4.

Решение. Опустим высоту из точки C на AB, пусть её основание — точка H. Тогда $BH = a\cos\angle B$, а $AH = b\cos\angle A$, причём $BH + AH = c$. Отсюда $BH = \frac{4}{5}c$, а $AH = \frac{1}{5}c$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}\angle B}{\operatorname{tg}\angle A} = \frac{\frac{HC}{HB}}{\frac{HC}{HA}} = \frac{HA}{HB} = \frac{1}{4}\,.$$

$\square$

Задача 4.2. В остроугольном треугольнике ABC напротив углов A, B, C лежат стороны a, b, c соответственно. Известно, что $a\cos\angle B - b\cos\angle A = \frac{1}{5}c$. Найдите $\frac{\operatorname{tg}\angle B}{\operatorname{tg}\angle A}$.

Ответ: 2/3.

Задача 5.1. Действительные числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} 26a^2 + 42ab + 17b^2 = 10, \\ 10a^2 + 18ab + 8b^2 = 6. \end{cases}$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $|b|$.

Ответ: 14.

Решение. Сложив уравнения системы, получаем

$$36a^2 + 60ab + 25b^2 = 16 \Leftrightarrow (6a + 5b)^2 = 4^2.$$

Вычев из первого уравнения второе, получаем

$$16a^2 + 24ab + 9b^2 = 4 \Leftrightarrow (4a + 3b)^2 = 2^2.$$

Итого имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 6a + 5b = \pm 4, \\ 4a + 3b = \pm 2. \end{cases}$$

Решив её, получаем четыре решения: $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(11, -14)$, $(-11, 14)$, откуда наибольшее значение $|b|$ равно 14.

□

Задача 5.2. Действительные числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} 26a^2 + 42ab + 17b^2 = 10, \\ 10a^2 + 18ab + 8b^2 = 6. \end{cases}$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $|a|$.

Ответ: 11.

Задача 5.3. Действительные числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} 37a^2 + 62ab + 26b^2 = 17, \\ 12a^2 + 22ab + 10b^2 = 8. \end{cases}$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $|b|$.

Ответ: 23.

Задача 5.4. Действительные числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} 37a^2 + 62ab + 26b^2 = 17, \\ 12a^2 + 22ab + 10b^2 = 8. \end{cases}$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $|a|$.

Ответ: 19.

Задача 6.1. У Деда Мороза имеется 202 яблока, 202 апельсина и 202 мандарина, которые он хочет отправить в Самару и Саратов в качестве новогодних подарков детям. Дед Мороз хочет разложить эти фрукты по двум коробкам так, чтобы в каждой коробке присутствовали фрукты всех трёх видов, причём произведения количества яблок, количества апельсинов и количества мандаринов в коробках были одинаковыми. Сколькими способами он может так сделать? (Способы, различающиеся перестановкой коробок, считаются различными. Фрукты одного вида считаются одинаковыми.)

Ответ: 601.

Решение. Пусть Дед Мороз отправит в Самару x яблок, y апельсинов и z мандаринов. Тогда должно выполняться равенство

$$xyz = (202 - x)(202 - y)(202 - z). \tag{1}$$

После раскрытия скобок в правой части и переноса слагаемого $-xyz$ влево, мы получим слева $2xyz$, а справа несколько слагаемых, каждое из которых кратно 101. Тогда и xyz должно быть кратно 101, откуда одно из чисел x, y, z должно быть кратно 101 (т.к. 101 простое). Заметим, что ни одно из чисел x, y, z не равно 0 или 202, т.к. в каждой коробке должны присутствовать фрукты всех видов. Значит, какого-то фрукта должно быть по 101 в каждой коробке. Без ограничения общности, пусть это яблоки. Подставив $x = 101$ в (1), получим

$$101yz = 101(202 - y)(202 - z) \Leftrightarrow \frac{y}{202 - y} = \frac{202 - z}{z}.$$

Заметим, что функция $\frac{y}{202-y}$ монотонно возрастает, поэтому при фиксированном z подходящее y только одно, причём подходит $y = 202 - z$. Итого мы получили, что в одной коробке одного из фруктов должно быть половина, а других симметрично относительно половины. Осталось посчитать количество способов.

Есть один отдельный случай, когда всех трёх фруктов в обеих коробках поровну. В остальных случаях одного из фруктов ровно половина в каждой коробке, а других не половина. Пусть половина яблок, тогда в Самарской коробке апельсинов может быть от 1 до 100 и от 102 до 201, итого 200 вариантов (мандарины определяются однозначно). Случаи, когда половина апельсинов или мандаринов аналогичны. Итого 601 вариант. □

Задача 6.2. У Деда Мороза имеется 206 яблок, 206 апельсинов и 206 мандаринов, которые он хочет отправить в Самару и Саратов в качестве новогодних подарков детям. Дед Мороз хочет разложить эти фрукты по двум коробкам так, чтобы в каждой коробке присутствовали фрукты всех трёх видов, причём произведения количества яблок, количества апельсинов и количества мандаринов в коробках были одинаковыми. Сколькими способами он может так сделать? (Способы, различающиеся перестановкой коробок, считаются различными. Фрукты одного вида считаются одинаковыми.)

Ответ: 613.

Задача 6.3. У Деда Мороза имеется 214 яблок, 214 апельсинов и 214 мандаринов, которые он хочет отправить в Самару и Саратов в качестве новогодних подарков детям. Дед Мороз хочет разложить эти фрукты по двум коробкам так, чтобы в каждой коробке присутствовали фрукты всех трёх видов, причём произведения количества яблок, количества апельсинов и количества мандаринов в коробках были одинаковыми. Сколькими способами он может так сделать? (Способы, различающиеся перестановкой коробок, считаются различными. Фрукты одного вида считаются одинаковыми.)

Ответ: 637.

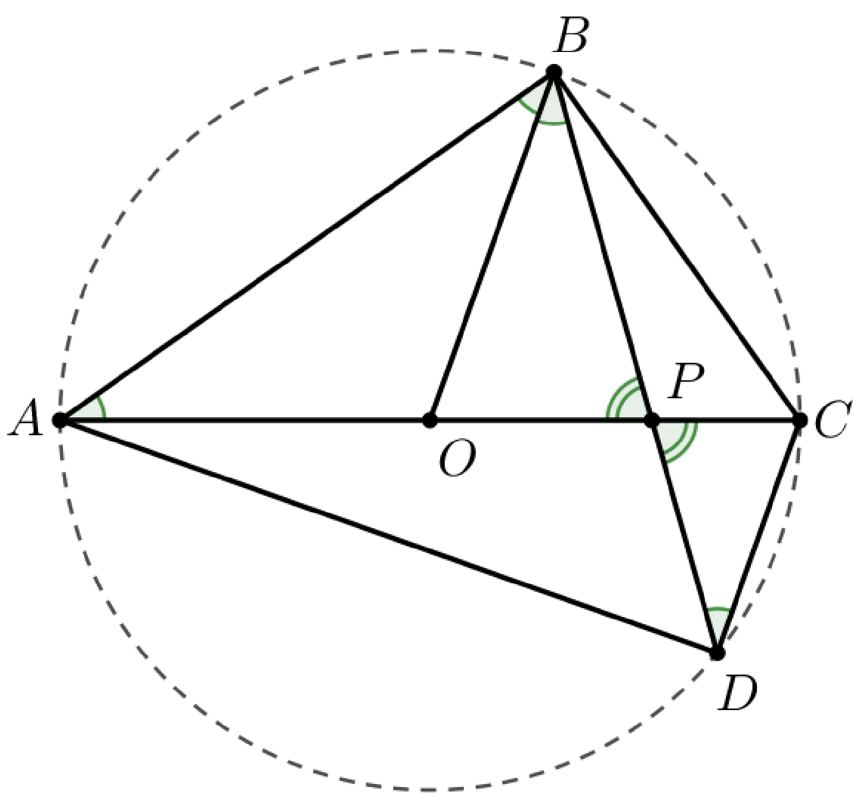
Задача 6.4. У Деда Мороза имеется 218 яблок, 218 апельсинов и 218 мандаринов, которые он хочет отправить в Самару и Саратов в качестве новогодних подарков детям. Дед Мороз хочет разложить эти фрукты по двум коробкам так, чтобы в каждой коробке присутствовали фрукты всех трёх видов, причём произведения количества яблок, количества апельсинов и количества мандаринов в коробках были одинаковыми. Сколькими способами он может так сделать? (Способы, различающиеся перестановкой коробок, считаются различными. Фрукты одного вида считаются одинаковыми.)

Ответ: 649.

Задача 7.1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 5 так, что диагональ AC — диаметр окружности. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке P. Известно, что $BD = AB$ и $PC = 2$. Найдите длину стороны CD.

Ответ: 10/3.

Решение.



Отметим точку O — центр окружности. Заметим, что треугольники OPB и CPD подобны. Действительно, $\angle ABO = \angle DBO$, так как AB и BD симметричны относительно BO (прямая BO — ось симметрии равнобедренного треугольника ABD), $\angle BAO = \angle ABO$, т.к. O — центр и $\angle BAC = \angle BDC$ из вписанности.

Из подобия получаем $CD = PC \cdot \frac{BO}{OP} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$. □

Задача 7.2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 5 так, что диагональ AC — диаметр окружности. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке P. Известно, что $BD = AB$ и $PC = 3$. Найдите длину стороны CD.

Ответ: 15/2.

Задача 8.1. Известно, что $a^{2021}+b^{2021} = P(a+b, ab)$ для некоторого многочлена от двух переменных $P(x, y)$. Найдите сумму всех коэффициентов этого многочлена.

Ответ: 1.

Решение. Сумма коэффициентов многочлена равна значению этого многочлена в точке, где все переменные равны 0. Таким образом, нам нужно вычислить значение $a^{2021} + b^{2021}$ при условии $a + b = 1$, $ab = 1$ (числа a и b при этом комплексные).

Обозначим $s_n = a^n + b^n$. Заметим, что

$$a^n + b^n = (a^{n-1} + b^{n-1})(a + b) - ab(a^{n-2} + b^{n-2}) = (a^{n-1} + b^{n-1}) - (a^{n-2} + b^{n-2}),$$

т.е. $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$. Так как $s_1 = 1$, а $s_2 = (a + b)^2 - 2ab = -1$, можно последовательно вычислить другие s_n и заметить, что они зацикливаются с периодом 6:

$$s_1 = 1,\ s_2 = -1,\ s_3 = -2,\ s_4 = -1,\ s_5 = 1,\ s_6 = 2,\ s_7 = 1,\ s_8 = -1,\ \ldots.$$

Таким образом, $s_{2021} = s_5 = 1$.

Замечание. Вторую часть решения можно было сделать по-другому. Явно вычислив a, получаем $a = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$, а b соответственно $e^{\mp\frac{\pi i}{3}}$. Тогда пользуясь тем, что $2021 \equiv 5 \pmod 6$, получаем $a^{2021} + b^{2021} = e^{\pm\frac{5\pi i}{3}} + e^{\mp\frac{5\pi i}{3}} = 1$. $\square$

Задача 8.2. Известно, что $a^{2022}+b^{2022} = P(a+b, ab)$ для некоторого многочлена от двух переменных $P(x, y)$. Найдите сумму всех коэффициентов этого многочлена.

Ответ: 2.

Задача 8.3. Известно, что $a^{2024}+b^{2024} = P(a+b, ab)$ для некоторого многочлена от двух переменных $P(x, y)$. Найдите сумму всех коэффициентов этого многочлена.

Ответ: -1.

Задача 8.4. Известно, что $a^{2025}+b^{2025} = P(a+b, ab)$ для некоторого многочлена от двух переменных $P(x, y)$. Найдите сумму всех коэффициентов этого многочлена.

Ответ: -2.

Задача 9. В клетчатой таблице размером $7\times n$ каждая клетка покрашена красным или синим цветом. Найдите наименьшее возможное значение n такое, что для любой раскраски таблицы можно выбрать 4 строки и 4 столбца, для которых 16 клеток, образованных при их пересечении, имеют одинаковый цвет.

Ответ: 211.

Решение. Докажем, что при $n \geqslant 211$ условие всегда выполнено. Напишем над каждым столбцом тот цвет, клеток которого в нём больше. Тогда столбцов какого-то цвета будет хотя бы 106. Для каждого столбца этого цвета оставим в нём ровно 4 клетки этого цвета. Так как способов расположить 4 клетки в столбце из 7 клеток $C_7^4 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$ и $106 > 35 \cdot 3$, то найдутся хотя бы 4 столбца с одинаковым расположением этих 4 клеток. Тогда эти 4 столбца и 4 строки — искомые.

Докажем, что при $n = 210$ можно построить таблицу так, чтобы условие не было выполнено (понятно, что и при всех меньших n тогда тоже можно). Для этого для каждого из 105 возможных расположений 4 красных клеток в столбце из 7 клеток сделаем по 3 столбца с таким расположением (а остальные клетки в этих столбцах покрасим в синий), и аналогично сделаем 105 столбцов с инвертированными цветами. Получим таблицу 7×210, в которой условие, очевидно, не выполняется. $\square$