 А. В. Доледенок, Е. С. Коган, Д. В. Трещёв

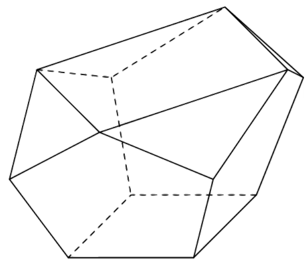
Разнобой перед ММО

1. Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1.$$

2. Найдите такое значение $a > 1$, что уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

3. У многогранника, изображённого на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



4. Функция f каждому вектору v (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причём для любых векторов u, v и любых чисел a, b значение $f(au + bv)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

5. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?

6. Существует ли тетраэдр, в сечениях которого двумя разными плоскостями получаются квадраты 1×1 и 100×100?

7. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остается только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.