Инвариант Дена

Определение. Многоугольники (многогранники) называются *равновеликими*, если их площади (объёмы) совпадают. Два многоугольника (многогранника) называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на части, переложив которые, можно получить другой.

Очевидно, что любые два равносоставленных многоугольника (многогранника) равновелики. В двумерном случае верно и обратное утверждение.

Теорема Бойяи – Гервина. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Оказывается, что в пространстве это утверждение неверно.

Определение. Пусть у многогранника M ровно k рёбер, их длины равны $l_1, l_2, \ldots, l_k$, а величины двугранных углов при этих рёбрах равны $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ соответственно. *Инвариантом Дена* многогранника M относительно функции f назовём величину

$$D_f(M) = \sum l_i f(\varphi_i),$$

где f — некоторая аддитивная функция (то есть $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$), для которой $f(\pi) = 0$.

Вопрос. Почему такая функция f вообще существует?

1. Пусть многогранник M разбит на многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Докажите, что

$$D_f(M) = D_f(M_1) + D_f(M_2) + \ldots + D_f(M_k).$$

2. **(а)** Докажите, что для любой аддитивной функции f выполнено равенство $f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.
   (б) Найдите инвариант Дена куба.

3. **(а)** Докажите, что число $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ иррационально.
   (б) Докажите, что куб и правильный тетраэдр с одинаковыми объёмами не равносоставлены.

4. Рассмотрим тетраэдр, натянутый на три попарно перпендикулярных ребра одинаковой длины, отложенных от одной точки. Докажите, что он не равносоставлен ни кубу, ни правильному тетраэдру тех же объёмов.

5. Докажите, что инвариант Дена любой призмы равен 0.

6. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько правильных тетраэдров.