Постулат Бертрана

Постулат Бертрана. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое простое число p, что $n < p \leqslant 2n$.

Обозначим за $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Обозначим за R_n произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таковых нет, произведение считаем равным единице).

1. Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ вычисляется по формуле:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

2. **(а)** Докажите, что если простое $p > 2n$, то C_{2n}^n не делится на p.

(б) Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^n ровно в первой степени.

(в) Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$ и $p \neq 2$, то C_{2n}^n не делится на p.

(г) Докажите, что если $\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2n}{3}$, то p входит в C_{2n}^n не более чем в первой степени.

(д) Докажите, что если $p \leqslant \sqrt{2n}$ и C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k < 2n$.

3. Докажите, что $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ при любом натуральном $n > 1$.

4. **(а)** Докажите, что $C_{2n+1}^n < 2^{2n}$.

(б) Докажите, что произведение всех простых чисел от 1 до n меньше 4^n.

5. Докажите, что $R_n > \dfrac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при любом натуральном n.

6. Докажите, что $\pi(x) \leqslant \frac{x}{2}$ при $x \geqslant 8$.

7. Докажите, что $2^{n/3} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$ при натуральных $n \geqslant 450$.

8. **(а)** Докажите, что $R_n > 1$ при натуральных $n \geqslant 450$.

(б) Докажите постулат Бертрана.

9. Докажите, что для любого натурального k найдется такое $N(k)$, что $\forall n > N(k)$ между n и $2n$ содержится хотя бы k простых чисел.