

Теорема Кронекера

1. Дано положительное иррациональное число α , меньшее 1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α .
(а) Докажите, что не позже чем через тысячу прыжков он окажется на расстоянии меньше чем $1/1000$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).
(б) Докажите, что кузнечик рано или поздно посетит любую наперёд выбранную дугу окружности.
2. Докажите, что синус натурального угла может быть сколь угодно близок к 1.
3. Кузнечик сидит на прямой. Он умеет прыгать на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в каждую из сторон. Докажите, что он может попасть в любой интервал на прямой.
4. В начале координат сидит охотник, а во всех остальных точках координатной плоскости с целыми координатами сидит по круглому зайцу радиуса $\varepsilon > 0$. Докажите, что в каком бы направлении не выстрелил охотник, он попадёт в какого-нибудь зайца.
5. Докажите, что найдётся натуральное n такое, что десятичная запись числа 2^n начинается на 20222022.
6. (а) Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из одной точки и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α , а второй — с шагом длины β . Докажите, что в какой-то момент времени (не позднее чем через 1000^2 секунд) оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $1/1000$ от исходной точки.
(б) Та же задача для n кузнечиков и 1000^n секунд.
7. Пусть кузнечик прыгает по окружности единичной длины с иррациональным шагом α . На окружности выделена дуга длины ε . Пусть за n прыжков кузнечик попал в интервал $k(n)$ раз. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \varepsilon$.
8. На какую цифру чаще всего начинается степень двойки?