

## Алгебраический разницей

1. Коэффициенты  $a, b, c$  квадратного уравнения  $ax^2 - bx + c = 0$  являются степенями двойки. Докажите, что если корни этого уравнения — целые числа, то эти корни совпадают.
2. Пусть  $a, b, c$  — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся хотя бы на 1.

3. Последовательности положительных чисел  $(x_n)$  и  $(y_n)$  удовлетворяют условиям  $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2, y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$  при всех натуральных  $n$ . Докажите, что если все числа  $x_1, x_2, y_1, y_2$  больше 1, то  $x_n > y_n$  при каком-нибудь натуральном  $n$ .
4. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?
5. Докажите, что любую функцию, определенную на всей оси, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет ось симметрии.
6. Докажите, что для любого нечётного числа найдётся кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из нечётных цифр.
7. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.
8. Существует ли такое конечное множество  $\mathcal{M}$  ненулевых действительных чисел, что для любого натурального  $n$  найдется многочлен степени не меньше  $n$  с коэффициентами из множества  $\mathcal{M}$ , все корни которого действительны и также принадлежат  $\mathcal{M}$ ?