Тренировочная олимпиада

1. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. Если в обгоне участвует велосипедист с фляжкой, то он передает её другому. (Моментов, когда двое обгоняют одного, не происходит). Может ли оказаться так, что, как долго бы ни ездили велосипедисты, у двух из них фляжка так и не побывает?

2. Графики функций $f(x) = -x^2 + b_1x + c_1$ и $g(x) = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются в различных точках графика функции $h(x) = ax^2 + bx + c$, причём $a > 0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к графикам $f(x)$ и $g(x)$.

3. В городе Цветочном n площадей и m улиц ($m \geqslant n + 1$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо синей, либо красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города.

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера ω с центром на диагонали AC_1 пересекает рёбра AB, AD, AA_1 в точках K, L, M соответственно, а рёбра C_1D_1, C_1B_1, C_1C — в точках K_1, L_1, M_1 соответственно. Оказалось, что плоскости KLM и $K_1L_1M_1$ параллельны, но треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ не равны. Докажите, что диагональ AC_1 образует равные углы с рёбрами AB, AD и AA_1.

5. Существуют ли такие действительные числа x, что $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 100x$ целые?