Тренировочная олимпиада

1. Найдите все острые углы α, для которых $\sin(\sin\alpha + \alpha) = \cos(\cos\alpha - \alpha)$.

2. Даны различные действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. Докажите, что в наборе

$$\left\{a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{100}\right\}$$

каждое число встречается не более 50 раз.

3. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть M — середина стороны BC, K — середина B_1C_1. Докажите, что описанная окружность треугольника KHM касается прямой AA_1.

4. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырёх сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно с ней соседние).

5. Даны натуральные взаимно простые числа a и b. Таня написала на доске натуральное число $t < b$. Каждую секунду число x на доске заменяется на наименьшее натуральное из четырёх чисел $\{x-a, x+a, x-b, x+b\}$, которое ещё не появлялось на доске до этого. Докажите, что этот процесс будет продолжаться бесконечно долго, причём каждое натуральное число когда-нибудь будет выписано.