

## Стереометрия

1. Назовём прямую, проходящую через середины скрещивающихся рёбер тетраэдра *хорошей*, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные рёбра тетраэдра. Докажите, что если хотя бы две средние линии хорошие, то тетраэдр правильный.
2. Существует ли пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противоположного бокового ребра под прямым углом?
3. Через точку  $P$  внутри сферы провели три хорды  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , не лежащие в одной плоскости. Оказалось, что описанные сферы тетраэдров  $PABC$  и  $PA_1B_1C_1$  касаются. Докажите, что  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ .
4. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвёртое ребро также является хорошим.
5. На сфере  $\omega$  отмечена фиксированная точка  $M$ . Рассматриваются все тройки точек  $A, B, C$  на сфере, такие что прямые  $MA, MB, MC$  попарно перпендикулярны. Докажите, что все плоскости  $ABC$  имеют общую точку.
6. Дан тетраэдр  $ABCD$ , в котором выполняется равенство

$$\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ.$$

Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $M$  — середина отрезка  $CD$ . Докажите что прямые  $AB$  и  $MO$  перпендикулярны.

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра  $ABCD$ , кроме ребра  $CD$ . Докажите, что существует сфера, которая касается всех рёбер этого тетраэдра, кроме ребра  $AB$ .