

Комбинаторный разбой

1. Клетки прямоугольника 7×8 покрашены в три цвета, причем в каждом квадратике 2×2 есть клетки всех трех цветов. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено в первый цвет?
2. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну клетку со своим обидчиком.
3. На доске записаны числа $2, 4, \dots, 2022$. Женя и Леша играют в игру. Ходы делаются по очереди. Каждым ходом игрок уменьшает одно из чисел на 1. После каждого хода Витя стирает новое число, если оно равно 0 или совпадает с одним из остальных чисел на доске. Выигрывает игрок, сделавший последний ход. Первым ходит Женя. Кто выиграет при правильной игре?
4. Двое по очереди записывают натуральные числа от 1 до 25 в клетки таблицы 5×5 . Каждое число может быть записано ровно один раз. Если после заполнения сумма чисел в какой-нибудь строке или каком-нибудь столбце равна 70, то выигрывает начинающий, иначе его соперник. Кто выигрывает при правильной игре?
5. Какое наименьшее число круглых фишек диаметром $\sqrt{2}$ можно расставить на доске размером 7×7 клеток (длина стороны клетки равна 1) так, чтобы внутри каждой клетки хотя бы одна точка была накрыта некоторой фишкой?
6. 2022 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ тонн ништяков соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество ништяков. В итоге на складах по плану должно оказаться $y_1, y_2, \dots, y_{2022}$ тонн ништяков соответственно, причём $x_1 + \dots + x_{2022} = y_1 + \dots + y_{2022}$. За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?
7. На столе лежат рубашкой вверх 8 карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту или на все восемь) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи пяти вопросов наверняка узнать число бубновых карт на столе?
8. На шахматной доске каждая пара соседних по стороне клеток соединена дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, что из любой клетки до любой другой можно было бы добраться по не более чем 14 дорогам?