Геометрический разнобой

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.

2. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω в точках A и D, окружность ω_1 в точках A и E, а окружность ω_2 в точках M и N. Докажите, что $MD = NE$.

3. Дан треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Касательная к его описанной окружности в точке B пересекает прямую AC в точке P. Точка D симметрична точке B относительно точки P, а точка E симметрична точке C относительно прямой BP. Докажите, что четырёхугольник $ABED$ — вписанный.

4. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM = 2MD$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

5. Точка I_a — центр вневписанной окружности остроугольного треугольника ABC, касающейся стороны BC в точке X, а точка A' диаметрально противоположна точке A в описанной окружности этого треугольника. На отрезках I_aX, BA', CA' выбраны точки Y, Z, T соответственно таким образом, что $I_aY = BZ = CT = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

6. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

7. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи AD и BC — в точке Q. Докажите, что если $\angle APM = \angle DPN$, то $\angle AQM = \angle BQN$.

8. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}\,.$$