

Числовой разницей

1. Найдите все натуральные k такие, что $5^k - 1$ является произведением чётного количества последовательных натуральных чисел.
2. Произведение 2021 натурального числа имеет ровно 2020 различных простых делителей. Докажите, что произведение нескольких из этих чисел (возможно, одного) является точным квадратом.
3. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого a , то p является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого c .
4. Каждое из двух натуральных чисел увеличили на одно и то же натуральное число s . Может ли НОК двух полученных чисел равняться НОКу двух исходных чисел?
5. Найдите все натуральные a и b такие, что $a^2 + b : b^2 + a$, причём число $b^2 + a$ является степенью некоторого простого числа.
6. Для натурального $m > 1$ обозначим

$$A = \{m + 1, 3m + 2, 5m + 3, 7m + 4, \dots\}.$$

Докажите, что существует натуральное $a < m$ такое, что хотя бы одно из двух чисел 2^a и $2^a + 1$ лежит в множестве A .

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $\frac{k(k+1)}{2} - 2^n$, где k и n — целые неотрицательные числа.
8. Пусть A — бесконечное подмножество натуральных чисел. Найдите все натуральные n такие, что для всех $a \in A$ справедливо

$$a^{n!} + a^{(n-1)!} + \dots + a^{1!} + 1 : a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1.$$