Мегаразнобой

1. На доске написано натуральное число. Раз в минуту Лёша прибавляет к числу на доске какой-то его положительный делитель, записывает на доску результат и стирает прошлое число. При этом ему запрещено дважды подряд прибавлять одно и то же число. Докажите, что он может действовать так, чтобы на доске когда-нибудь оказался точный квадрат.

2. Витя выбрал действительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$. Для каждой тройки различных чисел из этих шести Витя вычислил их сумму, а затем выписал все 20 полученных чисел в порядке возрастания. Оказалось, что все выписанные на доску числа различны, число $a_2+a_3+a_4$ выписано 11-м, а число $a_2+a_3+a_6$ — 15-м. Каким по счёту было число $a_1+a_2+a_6$?

3. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что P лежит между B и Q. Лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Обозначим через B_1, P_1, Q_1, C_1 проекции точек B, P, Q, C на прямые AP, AQ, AP, AQ соответственно. Докажите, что прямые B_1P_1 и C_1Q_1 пересекаются на прямой BC.

4. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ каждый студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал». После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт. Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?

5. Дано натуральное число, делящееся на 4. В ряд выписаны в порядке возрастания все его натуральные делители (включая 1 и само число). Докажите, что какие-то два соседних числа отличаются ровно на 2.

6. Есть сейф, который можно открыть, введя *секретный код,* состоящий из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Изначально было введено n нулей, но сейф остался закрыт. За одну попытку можно ввести произвольную последовательность из n нулей и единиц. Если введённая последовательность совпадет с секретным кодом, то сейф откроется. Если введённая последовательность совпадет с секретным кодом в большем количестве позиций, чем предыдущая введённая последовательность, то будет слышен щелчок. В иных случаях сейф останется закрытым и щелчка не будет. За какое наименьшее количество попыток гарантированно удастся открыть сейф?

7. Даны неотрицательные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$), сумма которых равна $\frac{n}{2}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \ldots + a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-2} + 2a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-1}\,,$$

где $a_{j+n} = a_j$ для всех j. Докажите, что $b_i \geqslant 1$ хотя бы для одного индекса i.