Фазовое пространство

Разбиение на части

1. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым — второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

2. Барон Мюнхгаузен проводит экскурсию по Москве. Он утверждает для любого порядка, который ему загадают туристы, он сможет найти такую точку в городе, из которой все 7 сталинских высоток видны в этом порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удастся это сделать?

3. На плоскости вбито n гвоздей общего положения. Проводятся прямые, не пересекающие ни один из гвоздей. Две прямые назовем *эквивалентными*, если одна из них может быть перемещена между гвоздями, так чтобы получилась вторая. Чему равно число классов эквивалентности прямых?

Про площадь

4. На плоскости расположены многоугольник площади 1 и 1000 точек. Докажите, что многоугольник можно сдвинуть на вектор, модуль которого не превосходит $\sqrt{\frac{1000}{\pi}}$, так, чтобы сдвинутый многоугольник не содержал ни одну из точек внутри себя.

5. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

Непрерывные кривые

6. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спускался с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороги он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.

7. Из пункта A в пункт B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что машины (точки), соединенные веревкой длины меньше 2, смогли проехать из A в B, не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться круглые возы радиуса 1, если они идут на встречу друг другу по разным дорогам?

8. **(а)** Двое флатландцев спускаются с высочайшей горы Флатландии — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а её поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Докажите, что флатландцы могут достичь моря, всё время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.
(б) Докажите, что если есть несколько гор равной высоты, и по склону каждой горы спускается флатландец, то они смогут спуститься, оставаясь все на одной и той же высоте.