

Алгебраический разностью

1. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при любых x, y если $x + y \neq 0$, то

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}.$$

Докажите, что $f(x) \equiv 0$.

2. При каждом значении $n \in \mathbb{N}$ решить уравнение $(x + y)^n = x^n + y^n$.
3. Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Докажите, что $P(k) \geq (k + 1)^n \forall k \in \mathbb{N}$.
4. При каждом значении $n \in \mathbb{N}$ решить в положительных числах систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все углы α , для которых набор чисел $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha$.
6. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, все корни которого являются чисто мнимыми числами. Докажите, что все корни многочлена $P'(x)$, кроме одного, также являются чисто мнимыми.
7. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}.$$