Случайные блуждания

Определение. Будем называть ломаную $A_0A_1 \dots A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания,* если $A_0 = (m, k)$, где m, k — целые, и, если $A_i = (x, y)$, то $A_{i+1} = (x+1, y+1)$ или $A_{i+1} = (x+1, y-1)$. Назовем траекторию *правильной,* если $A_0 = (0, 0)$. Число n будем называть *длиной траектории,* число A_0 — *началом,* а A_n — *концом.*

Определение. Пусть ломаная $A_0A_1 \dots A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i = (x_i, y_i)$. Тогда *уровнем* этой траектории будем называть разность $y_k - y_0$, где $y_k \geqslant y_i$ $\forall i = 0, 1, \dots, n$.

1. Сколько существует правильных траекторий длины n?

2. Среди всех правильных траекторий длины n найдите долю $p(n, k)$ правильных траекторий с концом (n, k).

3. *(Принцип отражения).* Пусть a, b — натуральные числа. Докажите, что количество траекторий из точки $(0, -a)$ в точку (n, b) равно количеству траекторий из точки $(0, a)$ в точку (n, b), пересекающих ось абсцисс.

4. **(а)** Пусть $T(n, k)$ доля правильных траекторий длины n с концом в точке (n, k), пересекающих прямую $y = k$ только в конце траектории, среди всех правильных траекторий длины n. Докажите, что $2T(n, k) = p(n-1, k-1) - p(n-1, k+1)$.

   (б) *(Лемма о баллотировке).* Пусть даны $n, k > 0$. Среди правильных траекторий с концами (n, k) найдите долю тех, что полностью лежат строго выше оси абсцисс (кроме начала траектории).

5. **(а)** Найдите количество правильных траекторий длины n, заканчивающихся в точке (n, k) и имеющих уровень не меньше m.

   (б) Найдите количество правильных траекторий длины n, заканчивающихся в точке (n, k) и имеющих уровень ровно m.

   (в) Найдите количество правильных траекторий длины n, имеющих уровень m.

6. Бар и дом пьяницы находятся на одной улице в 11 кварталах друг от друга. Пьяница ходит между домом и баром вдоль улицы от перекрестка к перекрестку. Он проходит один квартал, после чего равновероятно выбирает, пойти дальше на один квартал или вернуться назад. Когда он доходит до дома, он ложится спать и никуда дальше не идет. Изначально пьяница находится в пяти кварталах от дома и в шести от бара. С какой вероятностью он доберется до бара?