

Функции на плоскости – 2. Степень точки

Утверждение. Рассмотрим окружность ω , заданную уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$. Докажите, что $f(x_0, y_0)$ равно степени точки с координатами (x_0, y_0) относительно ω .

В задачах бывает полезно рассмотреть некоторую функцию, зависящую от степеней точки относительно разных окружностей.

Лемма о соосных окружностях

1. (Лемма о соосных окружностях.) Даны окружности ω_1 и ω_2 .

(а) Докажите, что геометрическим местом точек X таких, что $\text{Pow}_{\omega_1} X = k \cdot \text{Pow}_{\omega_2} X$, где $k \neq 1$, является либо окружность (возможно, нулевого радиуса), имеющая общую радикальную ось с ω_1 и ω_2 , либо пустое множество. Что будет при $k = 1$?

(б) Пусть ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , и для некоторых точек P и Q выполнено равенство

$$\frac{\text{Pow}(P, \omega_1)}{\text{Pow}(P, \omega_2)} = \frac{\text{Pow}(Q, \omega_1)}{\text{Pow}(Q, \omega_2)}.$$

Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности или прямой.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках C и D . Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.

3. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки X, Y, Z выбраны на продолжениях отрезков AB, AA_1, AC соответственно так, что $BC_1 = BX, 3A_1H = A_1Y, CB_1 = CZ$. Докажите, что точки A, X, Y, Z лежат на одной окружности.

4. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно и касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке T . Отрезки AT и PQ пересекаются в точке S . Докажите, что $\angle ABS = \angle ACS$.

Что-то другое

5. Даны две непересекающиеся окружности ω_a и ω_b . Рассматриваются всевозможные пары точек A на ω_a и B на ω_b такие, что длины касательных из A к ω_b и из B к ω_a равны. Найдите геометрическое место середин отрезков AB .

6. На стороне BC треугольника ABC лежит точка D . Окружности, описанные около треугольников ABD и BDC , повторно пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AEF , проходят через фиксированную точку на медиане из вершины A , не зависящую от положения точки D на стороне BC .

7. Точка P на вписанной окружности треугольника ABC такова, что из отрезков касательных из точки P к трём невписанным окружностям треугольника ABC можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что P лежит на средней линии треугольника.

8. Четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным. Докажите, что

$$\frac{1}{\text{Pow}(A, (BCD))} + \frac{1}{\text{Pow}(B, (ACD))} + \frac{1}{\text{Pow}(C, (ABD))} + \frac{1}{\text{Pow}(D, (ABC))} = 0.$$

(Через (XYZ) обозначена описанная окружность треугольника XYZ .)