Комбинаторный разнобой

1. На столе лежит 100 куч камней. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять со стола произвольное ненулевое число камней так, чтобы ход затрагивал не более чем 99 куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для любого начального положения камней укажите, кто выигрывает — начинающий или его противник.

2. На доске по кругу написано 100 натуральных чисел. За одну операцию разрешается число, которое больше обоих своих соседей, уменьшить на 1, а оба его соседа увеличить на 1. Может ли данный процесс длиться бесконечно?

3. У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Каких поездов он сможет составить больше: 12-вагонных или 11-вагонных? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

4. Ладья, стоящая на поверхности клетчатого куба, бьёт клетки, находящиеся с той же клеткой, где она стоит, в одном ряду, а также на продолжениях этого ряда через одно или несколько рёбер. Какое наибольшее количество небьющих друг друга ладей можно расставить на поверхности куба $50 \times 50 \times 50$?

5. Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:

   - съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;
   - пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

   Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу.

6. Дана клетчатая полоса $1 \times N$ ($N > 1$). Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

7. В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние — загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное множество целых чисел — шаблон S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жесткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

8. Докажите, что количество способов разрезать квадрат 999×999 на уголки из трёх клеток
   (а) делится на 2^4;
   (б) делится на 2^7.