Функции на плоскости (и в пространстве)

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют вещественные a, b, c такие, что для любой точки $A(x, y)$ выполнено равенство $f(A) = ax + by + c$.

Утверждение 1. Уравнение $f(x, y) = d$ для действительного d задаёт либо пустое множество, либо прямую, либо всю плоскость.

Утверждение 2. Для любых точек A, B, C и вещественных λ и μ таких, что точка C делит отрезок AB в отношении $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB} = \mu/\lambda$, верно равенство

$$f(C) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} f(A) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f(B).$$

Верно и обратное — если функция удовлетворяет такому свойству, то она линейная.

Примеры линейных функций: константа, ориентированное расстояние до фиксированной прямой, ориентированная площадь треугольника XBC с фиксированным основанием BC.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1.
(а) Докажите, что для любой точки на отрезке B_1C_1 расстояние от неё до прямой BC равно сумме расстояний от неё до прямых AB и AC.
(б) Пусть AA_1 — биссектриса внешнего угла A. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.
(в) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI, где O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно.

2. **(а)** Внутри треугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про треугольник?
(б) Внутри выпуклого четырёхугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про четырёхугольник?

3. **(а)** (*Прямая Гаусса.*) В четырёхугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.
(б) (*Прямая Ньютона.*) Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

4. У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней с общим ребром AB равна сумме площадей граней с общим ребром CD. Докажите, что середины ребер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

5. (*Эта задача уже была. Попробуйте осмыслить её в контексте линейных функций.*) Внутри правильного n-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в два цвета. Докажите, что сумма длин отрезков одного цвета равна сумме длин отрезков другого цвета.

6. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_a. На отрезках BC_1, CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что отрезок XY проходит через I_a. Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_a и BI_a соответственно пересекаются на прямой B_1C_1.